Numérisation du Laplacien en dimension 1

I. Les polynômes de Tchebichev

1) Commencons par une astuce pour retrouver les formules de trigonométrie.

a) Utiliser la formule $\exp^{\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ dans l'égalité $\exp^{ia}\exp^{ib} = \exp^{i(a+b)}$ pour montrer que

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

b) Exprimer de la même façon $\sin(a+b)$ et $\cos(2\theta)$.

2) Soit $T_n(X)$ la suite de polynôme définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X \\ T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X) \qquad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

a) Montrer que T_n est un polynôme de degré n. Calculer le coefficient de X^n dans $T_n(X)$.

b) Montrer que T_n vérifie, pour tout θ : $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

c) Utiliser cette égalité pour trouver toutes les racines de T_n. Montrer en particulier qu'elles sont toutes simples et situées dans l'intervalle $[-1, 1]$.

2) On définit maintenant pour tout polynôme P une norme :

$$\|P\| = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$

On notera bien que c'est la norme infinie sur l'intervalle $[-1, 1]$, et non sur $\mathbb{R}$ tout entier qui est considére.

a) Montrer que cela définit bien une norme.

b) On définit aussi pour tout polynôme P la norme infinie $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$

Montrer que cette quantité est infinie sauf pour les polynômes constants.

c) Calculer $\|T_n\|$.

3) On pose $U_n(X) = \frac{1}{2^n} T_n(X)$.

a) Montrer que U_n est un polynôme normalisé, c'est-à-dire que le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

b) Calculer $\|U_n\|$. Montrer que ce maximum est atteint en $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ que l'on précisera, et que pour tout $i \leq n-1$, $U_n(x_{i+1}) = -U_n(x_i)$.

c) Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynomes normalisés de degré n. Montrer que

$$\|U_n\| = \inf_{P\in\mathcal{P}} \|P\|$$

On supposera qu'il existe $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|P\| < \|U_n\|$, et on montrera que le polynôme $U_n - P$ (de degré ?) change de signe $(n+1)$ fois sur $[-1, 1]$.

4) On pose $S_n(X) = T_n(1 - X/2)$.

a) Quelle est la relation de récurrence vérifiée par S_n ?

b) Quelles sont les racines de S_n.

II. Une matrice très importante

Dans cette partie, on note U_n la matrice de taille $n \times n$ ci-dessous :

$$U_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les polynômes caractéristiques P_{U_1} et P_{U_2}.
2) Montrer que le polynôme caractéristique de U_n vérifie la relation de récurrence

$$P_{U_n}(\lambda) = (2-\lambda)P_{U_{n-1}}(\lambda) + P_{U_{n-2}}(\lambda).$$

3) En déduire les valeurs propres de U_n. Donner en particulier la plus petite et la plus grande valeurs propres, notées respectivement $\rho_1(A)$ et $\rho_n(A)$.
4) Calculer le rapport $cond(A) = \frac{\rho_n(A)}{\rho_1(A)}$.
5) Trouver les vecteurs propres de cette matrice.

III. L'équation au Laplacien

On cherche à résoudre numériquement l'équation au Laplacien en dimension 1, avec condition nulle au bord :

$$\forall x \in [0,1], f''(x) = g(x), \quad f(0) = f(1) = 0$$

1) Calculer la solution exacte quand g est la fonction constante $g(x) = c$.

2) Pour les calculs numériques, on choisit un entier n, et on considère les points équidistants

$$x_i = \frac{i}{n+1}, \quad \text{pour } i = 1, \dots n,$$

et on définit $f_i = f(x_i)$, $g_i = g(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et $f_0 = f_{n+1} = 0$.
On approxime ensuite $f'(x_i)$ par $f'(x_i) \approx \dfrac{f(x_{i+1} - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = n(f_{i+1} - f_i)$
a) Expliquer pourquoi on peut alors approximer $f''(x_i)$ par $n^2(2f_i - f_{i+1} - f_{i-1})$, pour $i = 1, \dots n$.

b) On note $F = (f_1, \dots, f_n)$ et $G = (g_1, \dots, g_n)$. Quel système d'équation vérifient F et G si l'on remplace $f''(x_i)$ par sa valeur approchée dans $f''(x_i) = g(x_i)$, pour $i = 1, \dots n$?

IV. Utilisation de Scilab

On va maintenant utiliser Scilab pour résoudre numériquement l'equation $f'' = g$ avec la condition f nulle aux bords (c-à-d en 0 et 1).
1) a) On prendra $n = 100$. Définir la matrice U à l'aide d'une de vos méthodes préferées.
b) Vérifier les valeurs propres en les calculant avec Scilab.

2) a) Construire un vecteur X de taille n contenant tous les x_i. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Définir aussi un vecteur X_b qui contiennent $(0, x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$.
b) Définir un vecteur G de taille n contenant les points $g_i = g(x_i)$ pour $i = 1, \dots n$ avec la fonction $g = 1$.

3) Résoudre le système et ranger le résultat dans un vecteur F. Ajouter 0 au début et à la fin de ce vecteur pour former Fb.

4) Faire un graphique avec le résultat Fb obtenu en fonction de Xb.

5) Répeter l'opération avec les fonctions $g(x) = 2x$, $g(x) = -3x^2$, $g(x) = 2\cos(x)$, et toute autre fonction de votre choix.