# TD4 : Algèbre bilinéaire et normes matricielles

**Exercice 1: Formes linéaires et quadratiques**

1) Parmi les applications suivantes définies sur $\mathbb{R}^n$, lesquelles sont des formes linéaires, des formes bilinéaires (et dans ce cas sont-elles symétriques ou anti-symétriques), quadratiques... ? On notera toujours $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ou $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ nos vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ ou $n$ suivant les cas).

$$l(X) = ax_1 - ax_2, \quad p(Y) = y_2 - y_3 y_1, \quad b(X,Y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_3,$$

$$c(X,Y) = 2x_1 y_n - 4y_2, \quad d(X) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

2) Donner les formes quadratiques associées aux formes bilinéaires et réciproquement.

**Exercice 2: Décomposition de Schur**

Calculer la décomposition de Schur de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.**

Soit $A$ une matrice réelle inversible. Montrer que $A^T A$ est symétrique définie positive.

**Exercice 4: Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. En considérant le vecteur $\frac{<x,y>}{||y||^2} y - x$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$| < x, y > | \leq ||x||.||y||.$$

**Exercice 5.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.
Montrer qu'il existe un unique couple de matrices $(O, T)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $O$ est orthogonale et $T$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs et $A = OT$.

**Exercice 6.**

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt aux vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.**
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ (ensemble des polynômes à coefficients réels sur $\mathbb{R}$) muni du produit scalaire
$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

1) Construire une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{Vect}(P_0, P_1, \ldots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^k), \\ < P_k, X^k > > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2) Montrer que $P_n$ a la même parité que $n$.
3) Montrer que toutes les racines (complexes *a priori*) de $P_n$ sont réelles, simples, et situées dans l'intervalle $]-1, 1[$.
4) Calculer explicitement $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$.

**Exercice 8. Inégalité d'Hadamard**

Soit $A = (A_{ij})_{i,j=1}^{n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det A| \leq \prod_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_{ij}^2}$.

**Exercice 9: Dualité et norme**

Soit $l$ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^2$ par $l(x_1, x_2) = 2x_1 - 4x_2$.
1) Trouver un vecteur $y$ de $\mathbb{R}^2$ tel qu'on ait $l(x) = \langle y, x\rangle$, pour tout $x$ ($\langle , \rangle$ désignant le produit scalaire).
2) Montrer que toute forme linéaire s'écrit $l(X) = ax_1 + bx_2$. En déduire un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et son dual $(\mathbb{R}^2)^*$.
3) On peut géneraliser ce résultat : Montrer que toutes formes linéaire sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit $l(x) = \sum_{i=}^{n} a_i x_i$, si $X = (X_1, \ldots, x_n)$ dans la base canonique. Puis montrer qu'on peut construire pour tout $n$ une bijection entre $\mathbb{R}^n$ et son dual $(\mathbb{R}^n)^*$. (En fait, ce résultat reste même vrai dans un espace euclidien de dimension infinie)

On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. On définit alors une norme linéaire associée sur le dual de $\mathbb{R}^n$. Sa formule est donnée par, pour toute forme linéaire $l$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ :
$$|||l||| = \sup_{\|x\|_1=1} |l(x)|$$

4) Montrer que cela définit bien une norme.
5) Montrez que si on considère, grâce à l'isomorphisme ci-dessus, que $l$ est aussi un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors on a $|||l||| = \|l\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$.
6)
a) Que vaut l'autre norme associée $|||l|||_b = \sup_{\|x\|_\infty=1} |l(x)|$ ?

b) Et aussi $|||l|||_c = \sup_{\|x\|_2=1} |l(x)|$ ? (On utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Plus généralement, on pourrait montrer que pour toute norme $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$, avec $p \geq 1$, la norme associée par dualité est la norme $\|x\|_q = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q)^{1/q}$, ou $q$ est donné par la formule
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

7) Vérifier que cette relation est cohérente avec les réponses précedentes.

**Exercice 10: Normes matricielles**

Soit $A$ une matrice de taille $n \times n$. On définit, pour $i \in \{1, 2, \infty\}$

$$\|A\|_i = \sup_{\|X\|_i=1} \|AX\|_i$$

1) On va montrer que $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$, le maximum des sommes des valeurs absolues, en ligne.
a) On cherche un $X \in \mathbb{R}^n$, avec $\|X\|_\infty = 1$ tel que $\|AX\|_\infty$ soit maximum. Montrer qu'il appartient forcément à $S_\infty$, l'ensemble des vecteurs qui ne contiennent que des 1 et $-1$.
b) Parmi tous les vecteurs de $S_\infty$, trouvez celui qui maximise $\|AX\|_\infty$ et en déduire l'égalité annoncée.
c) Qu'est l'ensemble $S_\infty$ pour $B_\infty(1) = \{\|x\|_\infty \leq 1\}$ (la boulee unité pour la norme infinie) ? Il faut d'abord faire un dessin en dimension 2 pour répondre.
2) On s'intéresse maintenant à la norme matricielle $\|\cdot\|_2$.
a) Démontrer l'identité ci-dessous, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|AX\|_2^2 = \langle x, A^* Ax\rangle$$

b) $A^*A$ est-elle diagonalisable ? Si oui, quelles sont ses valeurs propres ? (On les notera $(\lambda_i)_{i=1\dots n}$)
c) Montrer que l'on peut choisir $P$ orthogonale telle que, avec $X = (x_1, \dots, x_n)$ :

$$\langle X, P * A^* APX\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

d) En déduire que $\|A\|_2$ est la plus grande valeur singulière de $A$.
3) On s'intéresse maintenant à la norme matricielle $\|\cdot\|_1$. On notera $S_1$ l'ensemble des vecteurs qui n'ont qu'un seul coefficients non nul, valant forcement $\pm 1$.
a) On suppose que tous les coefficients de la matrice sont positifs, ainsi que les coordonnées $x_i$de $X$, et. Montrer que pour maximiser $\|AX\|_1$, parmi les vecteurs $X$ à coordonnées positives telles que $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 1$, il faut forcément choisir un vecteur de $S_1$.
b) Sans toutes les hypothèses de positivités, mais toujours celle que $\|X\| = 1$, montrer que

$$\|AX\|_1 \leq \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|,$$

et qu'il y a même égalité pour certains vecteurs $X$ de $S_1$. c) Qu'est l'ensemble $S_1$ pour $B_1(1) = \{\|x\|_1 \leq 1\}$ (la boulee unité pour la norme un) ? Il faut d'abord faire un dessin en dimension 2 pour répondre.

**Exercice 11.**

Calculer $\|A_i\|_1, \|A_i\|_2, \|A_i\|_\infty, \|A_i\|_F$ pour les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 & -0,5 \\ 1 & 2,5 & 0,5 \\ -1 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.**

Montrer que pour toute matrice $A$ de taille $n \times n$ :

$$\sup_{\|X\|=1} \|AX\| = \sup_{\|X\|\leq 1} \|AX\| = \sup_{\|X\|\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

**Exercice 13: Norme de la trace**

Calculer la norme de la forme linéaire trace $\|\mathrm{tr}\| = \sup_{\|A\|=1} |\mathrm{tr}(A)|$, en utilisant pour $\|A\|$ différentes normes matricielles de votre connaissance.

**Exercice 14. Normes invariantes par changement de base**

1) Quelles sont les normes matricielles qui ne dépendent pas de la base utilisée pour écrire une matrice ? Question que l'on peut reformuler : quelles sont les normes telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \quad \|A\| = \|P^{-1}AP\| \ ?$$

2) Quelles sont les normes matricielles telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall P \text{ orthogonale} \quad \|A\| = \|P^{*}AP\| \ ?$$

**Exercice 15. Valeurs propres des matrices du Laplacien.**

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice telle que $a_{ii} = -2\ \forall i$, $a_{ij} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$. Soit $I$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit maintenant les matrices $B, C \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{R})$ comme matrices-blocs :

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & 0 & \cdot & \vdots \\ 0 & 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdot & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2I & I & 0 & \cdots & 0 \\ I & -2I & I & \cdot & \vdots \\ 0 & I & -2I & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdot & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & 0 & I & -2I \end{pmatrix}.$$

1) En supposant que toutes les valeurs propres de $A$ sont distinctes, calculer les valeurs et la dimension des espaces propres de $B$ et $C$ (en fonction de ceux de $A$).

2) Calculer les valeurs propres de $A$.

*Indication :* On vérifiera que les vecteurs de la forme $\left(\sin\left(\frac{k\pi}{1+n}\alpha\right)\right)_{k=1\dot{n}}$ sont des vecteurs propres pour $n$ valeurs de $\alpha$ distinctes à préciser. Valeurs de $\alpha$ qui sont donc les $n$ valeurs propres de $A$.