Normes matricielles et factorisation de matrices

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $||A||_p \geq \max_{i,j} |A_{ij}|$ $\forall p \geq 1$.
Est-ce encore vrai pour la norme de Frobenius ?

Exercice 2.
Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice unitaire.
Montrer que $||Qx||_2 = ||x||_2$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$.
Montrer que $||QA||_2 = ||AQ||_2 = ||A||_2$ $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est normale si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \quad ||Ax||_2 = ||A^*x||_2.$$

Exercice 4.
Montrer que l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe son rayon spectral n'est pas une norme. (On pourra par exemple considérer la matrice A ci-dessous et sa transposée)

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Exercice 5.
Soit $||\cdot||$ une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $||A|| < 1$. Montrer que $A - I$ est inversible et que, si la norme matricielle est subordonnée :

$$||(A-I)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Exercice 6. Pour toute matrice M, $\sigma_{\max}(M)$ désigne la plus grande valeur singulière de M et $\rho(M)$ est son rayon spectral, c'est-à-dire son plus grand module de valeur propre.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $||A||_2 = \sigma_{\max}(A) = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$

Exercice 7.
1) Soient A et B deux matrices symétriques définies positives. Montrer que

$$\left|\left|(A+B)^{-1}\right|\right|_2 \leq \frac{1}{\frac{1}{||A^{-1}||_2} + \frac{1}{||B^{-1}||_2}}.$$

2) En déduire que si A et B sont deux matrices symétriques définies positives,

$$\mathrm{cond}_2(A+B) \leq \max\left(\mathrm{cond}_2(A), \mathrm{cond}_2(B)\right).$$

Exercice 8: Une décomposition SVD Soit B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -3/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1) Calculer une décomposition en valeurs singulières de B.
2) Calculer $||B||_1$, $||B||_2$, $||B||_\infty$ et $||B||_F$.

Exercice 9. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq q$. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que $\lim_{p\to+\infty} ||x||_p = ||x||_\infty$ et que $\lim_{p\to q, 1\leq p} ||x||_p = ||x||_q$.
2) Montrer que $\lim_{p\to+\infty} ||A||_p = ||A||_\infty$ et que $\lim_{p\to q, 1\leq p} ||A||_p = ||A||_q$.

Exercice 10: Principe du min-max (Dur !)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On note $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ l'ensemble de ses valeurs propres rangées par ordre croissant et $\{w_i\}_{i=1}^n$ une base de vecteurs propres ortonormée.
1) Montrer que

$$\min_{u\in\mathbb{R}^{n*}} \frac{u^T A u}{u^T u} = \lambda_1$$

et que $u^T A u = \lambda_1 u^T u$ si et seulement si u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1.
2) Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. On note V_j l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension j de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\lambda_j = \min_{E\in V_j} \max_{u\in E} \frac{u^T A u}{u^T u} = \max_{F\in V_{j-1}} \min_{u\in F^\perp} \frac{u^T A u}{u^T u}$$

3) Soient A et B deux matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres λ_i et μ_i $(i = 1, \dots, n)$ rangées par ordre croissant. Montrer que

$$u^T A u \geq u^T B u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \lambda_i \geq \mu_i \quad \forall i.$$

Exercice 11.

1) Factoriser sous forme LU la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Calculer son déterminant.

Exercice 12.
On pose

$$A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&10&7\\2&7&21\end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est symétrique définie positive.
2) Calculer la factorisation de Cholesky de A.
3) Résoudre, en utilisant le résultat de la question précédente

$$Ax=\begin{pmatrix}0\\0\\96\end{pmatrix}$$

Exercice 13.
On veut résoudre au sens des moindres carrés le système d'équations linéaires

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\\1\end{pmatrix}$$

avec

$$A=\begin{pmatrix}0&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{3}{5}&-1\\\frac{4}{5}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

1) Trouver la factorisation de Cholesky de A^TA.
2) Écrire et résoudre l'équation normale associée au problème des moindres carrés.

Exercice 14.
Faire la décomposition LU de

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&4&0\\4&-1&5&1\\-2&2&-2&3\\0&3&-9&4\end{pmatrix}.$$

Résoudre les systèmes linéaires $Ax_i=e_i$ pour chaque e_i vecteur de la base canonique.
Calculer A^{-1}.

Exercice 15.

Effectuer la factorisation de Cholesky de $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&5&1&10\\3&1&35&5\\4&10&5&45\end{pmatrix}.$

Exercice 16.
Effectuer les factorisations LU (avec pivot) des matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&4&0\\4&-1&5&1\\-2&2&-2&3\\0&3&-9&4\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}2&-1&4&0\\4&-1&5&1\\-2&2&-7&3\\0&3&-8&4\end{pmatrix}$$

Exercice 17.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tridiagonale de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

1) Donner une relation de récurrence permettant de calculer la factorisation LU de A.
2) Donner un algorithme de résolution du système $Ax = y$.
3) Soit la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 18 & -18 & 0 \\ 0 & -18 & 44 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ce qui précède pour calculer une factorisation de Cholesky de A.

Exercice 18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On cherche à calculer

$$\sup_{\|x\|_2 > 0} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2}.$$

On définit pour cela la fonction f_A sur $\mathbb{R}^n - 0$ par : $f_A(x) = \dfrac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|^2}$.

1) Montrer que f_A est homogène de degré zéro, c-à-d que $\forall \lambda > 0,\ f_A(\lambda x) = \lambda^0 f_A(x) = f_A(x)$
2) Calculer $f_A(x)$ quand x est un vecteur propre.
3) Montrer que f est borné et en déduire l'existence d'un maximum $\|x_0\|_2 = 1$.
4) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n - 0$ et calculer sa dérivée.
5) Que peut-on dire du vecteur x_0 ? Que vaut $\sup_{\|x\|_2 > 0} f_A(x)$?
6) Que vaut l'infimum de cette même quantité ?