Normes matricielles et conditionnement

1) Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ choisie « au hasard », calculer $||A||_1$, $||A||_2$, $||A||_\infty$, $||A||_F$ et comparer ces normes à $\max_{i,j} |A_{ij}|$. Que constate-t-on ? On démontrera ce résultat en TD.

2) Écrire une fonction permettant de calculer le rayon spectral $\rho(A)$ pour une matrice A. Ecrire une autre fonction permettant de calculer la quantité $||A^k||_p^{1/k}$ pour une matrice A et deux entiers naturels p et k. En utilisant ces fonctions, comparer $\rho(A)$ et $||A^k||_p^{1/k}$ pour des valeurs de k de plus en plus grandes (par exemple, $k = 1, 2, 10, 20, 50, 70, 100, 200, 500$) et ceci pour différentes valeurs de p ($p = 1, 2$ et $p = \infty$). Que remarque-t-on ? On se propose maintenant de démontrer le résultat constaté.
a) Montrer que $\rho(A) \leq ||A^k||_p^{1/k}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
b) Pour $\varepsilon > 0$, posons

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A.$$

Montrer que $\rho(A_\varepsilon) < 1$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\rho(A) \leq ||A^k||_p^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon \quad \forall k \geq k_0,$$

puis conclure.

3) Ecrire maintenant une fonction qui permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée A si $\rho(A - Id) < 1$ grâce à la formule

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (Id - A)^k,$$

et qui renvoie que le calcul est impossible si $\rho(A - Id) \geq 1$.

4) Écrire une fonction permettant, pour tout entier naturel n, de construire la matrice de Hilbert H_n d'ordre n, dont le coefficient sur la $i$ème ligne et la $j$ème colonne est $1/(i + j - 1)$.
Calculer les conditionnements en norme $||\cdot||_2$ des 30 premières matrices de Hilbert et les ranger dans un vecteur. Tracer sur un graphique le logarithme de ces conditionnements en fonction de n et comparer avec la fonction $3.5n - 4.1$[1].

5) Un autre exemple de matrice mal conditionnée : on choisit cette fois la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[1]On pourrait montrer rigoureusement que le conditionnement de H_n est de l'ordre de $e^{\frac{7n}{2}}$ lorsque n est grand.

Résoudre, au moyen d'une fonction de scilab, le système linéaire

$$Ax = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Résoudre ce sytème avec un second membre légèrement perturbé puis avec une matrice légèrement perturbée. Vérifier les inégalités démontrées en cours.