Université Paris VII
L3 Maths – Option Maths Appliquées
M7301

Examen sur machine du 18 janvier 2007

(9h30-12h30)

Les notes de cours et de TD/TP sont autorisées.
Il est conseillé de tester vos fonctions sur des exemples simples pour vérification.
En cas d'erreur(s), lire attentivement les messages donnés par Scilab.

Exercice 1

1) Ecrire une fonction `echange_lignes` qui permet d'échanger les lignes i et j d'une matrice A. Tester votre fonction sur un exemple simple, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix},$$

en faisant plusieurs échanges.

2) Ecrire une fonction `ajout_kfois_ligne` qui permet d'ajouter à la ligne i d'une matrice A, k fois sa ligne j. Utiliser par exemple l'exemple de la question précédente et faire $L_2 \leftarrow L_2 - 5 \times L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 9 \times L_1$ pour tester votre fonction.

Exercice 2

On rappelle que les mineurs principaux d'une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

sont les déterminants $det(A^k)$ des matrices extraites

$$A^k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \qquad k = 1, ..., n.$$

1) Ecrire une fonction `mineurs` qui renvoie un vecteur dont la k-$i$ème composante est le mineur principal $det(A^k)$ d'une matrice carrée A. Le seul argument d'entrée de la fonction sera la matrice A. Tester votre fonction sur des exemples simples, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) En utilisant la question précédente, écrire une fonction `mineurs_non_nuls` qui renvoie 1 si *tous* les mineurs principaux d'une matrice carrée A sont supérieurs en valeur absolue à un seuil ϵ donné (c'est-à-dire $|det(A^k)| > \epsilon$, $\underline{\forall k}$) et qui renvoie 0 sinon. Tester votre fonction sur les exemples simples de la question précédente.

Remarque : le seuil ϵ permet de tenir compte des éventuelles erreurs d'arrondis. Il fera partie des arguments d'entrée de la fonction et sera choisi petit dans les applications, par exemple $\epsilon = 1.e^{-12}$.

Exercice 3

1) Ecrire une fonction `symetrique` qui renvoie 1 si une matrice carrée $A = (a_{i,j})$ est symétrique ($A^T = A$) et qui renvoie 0 sinon. De manière similaire à l'exercice précédent, la validité des égalités $a_{i,j} = a_{j,i}$ sera remplacée par la validité des inégalités $|a_{i,j} - a_{j,i}| < \epsilon$ où ϵ est un seuil intervenant en tant qu'argument d'entrée de la fonction et choisi petit dans les applications. La matrice A sera le seul autre argument d'entrée de la fonction. Tester votre fonction sur des exemples simples, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2) Ecrire une fonction `symetrique_def_pos` qui renvoie 1 si une matrice réelle carrée $A = (a_{i,j})$ est symétrique définie positive et qui renvoie 0 sinon. Les arguments d'entrée seront la matrice A et un seuil ϵ permettant de gérer les erreurs d'arrondis. Tester votre fonction sur les exemples de la question précédente.

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système

$$Ax = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant la méthode itérative de Jacobi. Pour cela, on définit donc M comme la matrice diagonale qui a la même diagonale que A, puis $N = M - A$ et enfin la suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^4$ par

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné,} \\ x_{n+1} = M^{-1}\left(Nx_n + b\right). \end{cases}$$

1) Cette suite converge-t-elle pour tout x_0 ? Justifier votre réponse (on pourra se servir du cours, et de Scilab pour effectuer d'éventuels calculs, pour répondre à cette question). Dans la suite on choisira $x_0 = b$.

2) Ecrire une fonction permettant de résoudre un système linéaire au moyen de l'algorithme de Jacobi. Les arguments de cette fonction seront la matrice du système, le second membre, le seuil de tolérance entre deux itérées successives et un nombre maximal d'itérations à effectuer si le seuil n'est pas atteint. On demande que cette fonction retourne la solution approchée ainsi que le nombre d'itérations effectuées.

3) Utiliser votre fonction pour calculer la solution à $\epsilon = 1.e^{-10}$ près. Combien faut-il d'itérations pour atteindre un seuil $\epsilon = 1.e^{-6}$?