Université Paris Diderot — Partiel du 9/11/2007 (2h30)
L3 Maths – Option Maths Appliquées
Analyse numérique matricielle

Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rigueur et de la clarté de la rédaction.
Les notes de cours sont autorisées.
Les appareils électroniques sont interdits.

Exercice 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à coefficients complexes. On pose $M_1 = A$ et on définit une suite de nombres complexes $(u_k)_{k\geq 1}$ et une suite de matrices complexes $(M_k)_{k\geq 1}$ par les relations de récurrence :

$$u_k = \frac{\mathrm{tr}(M_k)}{k}, \qquad M_{k+1} = (M_k - u_k I_n)A$$

où I_n désigne la matrice identité. On se propose de montrer que si le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$P_A(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + a_{n-1}X + a_n,$$

alors $a_k = -u_k$ (il s'agit de la méthode de Faddeev-Le Verrier pour le calcul des coefficients du polynôme caractéristique).

a) Montrer par récurrence que

$$M_k = A^k - \sum_{i=1}^{k-1} u_{k-i} A^i$$

b) Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A. On pose $t_k = \mathrm{tr}(A^k)$. Montrez que pour tout $k \geq 1$ on a

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

c) Utiliser la question a) pour écrire une relation de récurrence sur $(t_k)_{k\geq 1}$ faisant intervenir les (u_k).

d) Établir une autre relation de récurrence d'ordre k pour la suite $(t_k)_{k\geq 1}$ en utilisant le fait que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall k \geq 1$, $\lambda_i^k P_A(\lambda_i) = 0$.

e) Comparer les expressions trouvées en c) et d) et conclure.

Exercice 2
Trouver $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = A$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 3
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si on a la relation $AB - BA = B$, alors B est nécessairement nilpotente.

Exercice 4
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer de deux manières différentes A^n pour tout entier $n > 1$. On distinguera les cas où n est pair et ceux où il est impair.

Exercice 5
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice $A = (x_i x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Trouver ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Quel est le rang de A ?

Exercice 6
Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 (Scilab)
a) Écrire un programme qui génère la matrice $n \times n$ suivante (discrétisation du Laplacien) :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Idem pour la matrice suivante (Laplacien avec conditions périodiques)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Écrire un programme qui calcule la trace d'une matrice $n \times n$ sans utiliser la fonction `trace` de Scilab.