Équations Différentielles L3
2006/2007

Second devoir surveillé
Mercredi 4 Avril 2007

Exercice 1. (6 points)
On considère le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

1) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de ce système? En donner une base.

2) Quelle est la solution qui vérifie la condition initiale.

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

3) Calculer la résolvante du système.

4) Faire un dessin soigné de l'allure des trajectoires. Indiquer leur sens de parcours des trajectoires.

Exercice 2. (14 points)
Dans un réacteur chimique, un réactif A est introduit en permanence à vitesse constante, et y réagit pour donner le produit B, avec une vitesse de réaction qui dépend de la somme des deux concentrations. Le produit B est ensuite rapidement évacué. Pour modéliser ce réacteur, on écrit l'équation suivante:

$$\begin{cases} x' = 1 - (x + y) \\ y' = (x + y) - \alpha y \end{cases}$$

Les quantités x et y étant des concentrations de produits chimiques, on se restreindra au domaine $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. On supposera aussi que $\alpha > 1$.

1) Relier chacun des termes du système aux phénomènes décrits plus haut.

2) Trouver l'unique point d'équilibre (x_{eq}, y_{eq}) du système.

On introduit les nouvelles variables $u = x - x_{eq}$ et $v = y - y_{eq}$. Et on pose $Z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

3) Montrer que Z vérifie $Z' = AZ$, avec la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 - \alpha \end{pmatrix}$.

4) Discuter, suivant les valeurs de α (toujours > 1), la forme des trajectoires au voisinage du point d'équilibre. On dessinera dans chacun des cas la forme des trajectoires, en indiquant leur sens de parcours.

5) Que peut-on dire sur stabilité du point d'équilibre d'après ces schémas?

On se propose d'étudier maintenant le nouveau sytème

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 1 + \varepsilon \sin(t) - (x+y) \\ y' = (x+y) - \alpha y \end{array} \right.$$

6) a) Comment expliquer le changement par rapport au système précedent.
b) Montrer que Z, défini comme ci-dessus vérifie

$$Z'(t) = AZ(t) + B(t) \quad ,$$

avec un B à préciser.
c) Comment s'écrivent formellement les solutions d'un tel système.
d) On suppose pour la suite $\alpha = 2$. On va chercher une solution particulière sous la forme

$$Z(t) = \sin(t)V + \cos(t)W,$$

où V et W sont deux vecteurs inconnus. Déterminer ces deux vecteurs pour que Z soit solution de l'équation. Tracer schématiquement la courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ obtenue (choisir $\varepsilon = 1/2$ pour le dessin).
e) Déduire de la question précedente l'expression générale des solutions. Décrire sommairement le comportement en temps grand de ces solutions, et tracer sur le même dessin qu'à la question précedente une courbe paramétrée $(x(t), y(t))$ correspondant à une solution générale quelconque.