Université Paris 7 Denis Diderot
Licence L3
2006-2007

UFR de Mathématiques
Equations différentielles
P. Perrin

Partiel
Lundi 19 mars 2007
10h30-13h30

Barême envisageable : 4 + 5 + 11.

Les trois exercices proposés sont indépendants.

Exercice 1. On considère le système différentiel linéaire

$$u' = Au = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

1.1. Les fonctions $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment-elles une base des solutions de ce système ?

1.2. Même question pour les fonctions $e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.3. Déterminer une base des solutions du système.

1.4. Déterminer une base des solutions de l'équation différentielle $x" + 2x' + x = 0$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$x' = \frac{x}{a + x^2}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

2.1. Montrer qu'une solution maximale de cette équation, non identiquement nulle, ne peut s'annuler. En déduire que les solutions sont soit constantes soit strictement monotones.

2.2. Résoudre l'équation différentielle : on déterminera une relation $t = f(x)$ satisfaite par les solutions que l'on étudiera. En déduire l'intervalle de définition des solutions maximales.

2.3. Déduire de la question précédente une étude qualitative des solutions maximales de l'équation

$$x' = \frac{x}{2 + \sin(tx) + x^2}$$

(on précisera leur domaine de définition et leur comportement aux bornes de cet intervalle).

T.S.V.P.

Exercice 3.

On considère l'équation différentielle

$$x' = \frac{x^2}{(1+t^2)} - 2 \ .$$

3.1. Montrer que les solutions maximales de cette équation sont indéfiniment dérivables sur leur intervalle de définition et que, par tout point du plan, passe une et une seule solution maximale.

3.2. Notons (I, φ) une solution maximale. Montrer que $(-I, \psi)$, où

$$\forall t \in -I, \ \psi(t) = -\varphi(-t) \ ,$$

est encore une solution de l'équation différentielle. En déduire une symétrie sur l'ensemble des graphes des solutions maximales.

3.3. Etudier et tracer l'isocline associée à la pente 0 pour cette équation différentielle. En déduire un régionnement du plan.

3.4. Etudier et tracer les isoclines associées aux pentes 2 et -1 .

3.5. Montrer qu'une solution maximale vérifiant $|\varphi(0)| \leq \sqrt{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la solution maximale valant 0 en $t = 0$ est impaire et définie sur $\mathbb{R}$.

3.6. Montrer que la région $\{(t, x) \ ; \ t \geq 0, 2t < x < 2\sqrt{1+t^2}$ est un anti-tunnel. En déduire l'existence d'au moins une solution maximale ψ_0 telle que

$$\forall t \geq 0; 2t < \psi_0(t) < 2\sqrt{1+t^2} \ .$$

Montrer qu'une telle solution est unique.

3.7. Déduire de l'étude précédente un schéma présentant quelques solutions maximales de l'équation.