

**Examen. Session de rattrapage**

Lundi ? juin 2007

12h30-15h30

Barème envisageable : 6+5+9.

**Exercice 1.**

On considère l'équation différentielle

$$x' = x \sin x .$$

1.1. Montrer que les solutions maximales de cette équation sont indéfiniment dérivables sur leur intervalle de définition et que, par un point du plan, passe une et une seule solution maximale.

1.2. Etudier et tracer l'isocline associée à la pente 0 associée à l'équation différentielle. Déterminer toutes les solutions constantes. Donner un régionnement du plan.

1.3. Montrer qu'il existe une symétrie sur l'ensemble des graphes des solutions de cette équation.

1.4. Montrer que les solutions maximales non constantes sont bornées, strictement monotones et définies sur  $\mathbb{R}$  . Déterminer le comportement de ces solutions maximales lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  .

1.5. Dédire de l'étude précédente un schéma présentant quelques solutions maximales de l'équation. Déterminer les trajectoires de l'équation autonome.

**Exercice 2.**

On considère le système différentiel linéaire

$$u' = Au = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

2.1. Déterminer une base des solutions de ce système. En déduire l'exponentielle de la matrice  $A$  .

2.2. Soit  $v$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  . Le système  $u' = Au + v$  admet une solution particulière constante de la forme  $w$  ? Si oui, la déterminer.

2.3. Montrer que le système  $u' = Au + \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$  admet une solution particulière périodique et la déterminer.

### Exercice 3.

On considère le système

$$\begin{cases} x' &= x(1 - y - x) \\ y' &= y(2 - x) \end{cases}$$

- 3.1. Déterminer les solutions portées par les deux axes de coordonnées. Déterminer et tracer les trajectoires correspondantes. Montrer que toute trajectoire issue d'un point interne à l'un des quatre quadrants ne quitte pas ce quadrant.
- 3.2. Déterminer et tracer les isoclines horizontales et verticales du système. En déduire un régionnement du plan indiquant les variations des coordonnées.
- 3.3. Déterminer les positions d'équilibre du système. On étudiera la stabilité de chacune d'entre elles.
- 3.4. Dessiner l'allure des trajectoires du système au voisinage de chaque point critique.
- 3.5. Donner un schéma présentant des trajectoires harmonieusement choisies du système.