Exercices sur les exponentielles de matrices

Exercice 1. *Quelques exemples*
1) Pour les matrices ci-dessous, calculer A_i^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis e^{A_i}.

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

où μ, λ, et t sont des paramètres réels.
2) Utiliser les résultats de la question précédente pour calculer l'exponentielles des matrices suivantes:

$$B_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Propriétés utiles de l'exponentielle.*
1) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $B = PAP^{-1}$. Montrer que $e^B = Pe^AP^{-1}$.
2) Montrer que la matrice A_3 (respectivement A_4) de l'exercice 1 est semblable à la matrice C_3 (respectivement C_4) définie ci-dessous

$$C_3 = \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$$

et trouver les matrices de passages P_3 et P_4, telles que $A_3 = PC_3P^{-1}$ et $A_4 = PC_4P^{-1}$. Vérifier que l'on a bien $e^{A_3} = Pe^{C_3}P^{-1}$ et $e^{A_4} = Pe^{C_4}P^{-1}$.
3) Que dire de $e^{{}^tA}$?
4) En déduire que:
- Si A est symétrique, e^A est symétrique.
- Si A est anti-symétrique, e^A est orthogonale.

Exercice 3. *Déterminant de e^A.*
1) Soit A une matrice diagonale complexe de taille $n \times n$. Calculer $\det(e^A)$.
2) Calculer maintenant $\det(e^A)$ en supposant seulement que A est diagonalisable.
3) Soit A une matrice triangulaire supérieure de taille $n \times n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est triangulaire supérieure et calculer ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de A. En déduire que e^A est triangulaire supérieure et calculer ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de A.
4) Déduire de la question précédente que pour toute matrice carrée complexe A

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$