Université Paris 7 — L3 de maths appliqués et enseignement
2008-2009 — Deuxième semestre

Corrections et Indications pour la Première Feuille d'Exercices

1. Modélisation

Exercice 1. *Ligne d'horizon*

Faire un petit dessin, et bien indentifier les angles. Si h est l'altitude, R le rayon de la Terre et θ l'angle formé par l'observateur, le centre de la Terre et un point de l'horizon, on trouve $\cos(\theta) = R/(R+h)$. en utilisant des DL, car h et θ sont petits, on obtient:

$$1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 - \frac{h}{R}$$

et donc $\theta \approx \sqrt{2h/R}$. La distance d entre l'observateur et l'horizon qui nous intéresse est $d = R\theta \approx \sqrt{2Rh}$. Pour les applications numériques, ne pas oublier que $R = 6400$ km. Par exemple, pour un géant de 2 mètres qui a les pieds au bord de l'eau, l'horizon est à $3,6$ km.

Exercice 2. *Javelot*

Pour le DM.

Exercice 3. *Datation au carbonne 14*

(1) Si p est cette proportion, et que le temps est exprimé en années, alors $p' = -p/8000$.
(2) Les solutions sont des exponentielles décroissantes $p(t) = e^{-t/8000}$, car $p_0 = 1$.

Applications :

— (Néanderthal) Si t_1 est le temps écoulé depuis la mort de notre homme de Néanderthal, on a: $e^{-t_1/8000} = 624/10000 \approx 1/16$ et donc $t_1 = -8000\ln(0,0624) \approx 8000 \times \ln(2^4)$, ce qui donne $t_1 \approx 32000\ln(2) \approx 22000$ ans.

— (Cro-Magnon) Proportion comprise entre $e^{-30000/8000} = e^{-15/4}$ et $e^{-20000/8000} = e^{-5/3}$. Les valeurs numériques donnent une valeur comprise entre $2,3$ et $8,2\%$.

Exercice 4.

(1) $\dot{T} = -\lambda(T - T_{air})$, avec $\lambda > 0$ donné par les propriétés thermo-dynamique de l'objet. Si on pose $T_{rel} = T - T_{air}$, l'équation deveint $\dot{T}_{rel} = -\lambda T_{rel}$ qui a pour solution $T_{rel}(t) = T_{rel}(0)e^{-\lambda t}$.

(2) La solution est de la forme $T_{rel}(t) = 80e^{-\lambda t}$. Si t_1 (respectivement t_2) est le temps où l'objet est $60°$ C (resp. $30°$ C), alors on a $40 = 80e^{-\lambda t_1}$ et $10 = 80e^{-\lambda t_2}$, ce qui donne $\lambda t_1 = \ln(2)$ et $\lambda t_2 = 3\ln(2)$. Et au final $t_2 = 3t_1$, et l'objet met 1 heure à atteindre la température de $30°$ C.

(3) On pose maintenant $T_{rel} = T + 5$, et pour la simplicité des calculs $A = 35$ et $\omega = 2\pi/365$. L'équation s'écrit alors $\dot{T}_{rel} = -\lambda T_{rel} + A\cos(\omega t)$ avec la condition initiale $T_{rel}(0) = 35°$. C'est une règle générale que dans ce cas, il y a toujours une solution particulière de la forme:

$$T_{part}(t) = B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$$

avec B_1 et B_2 deux constantes réelles. en remplaçant dans l'équation, on obtient:

$$(B_1 + \lambda B_2)\sin(\omega t) + (\lambda B_1 - B_2)\cos(\omega t) = A\cos(\omega t)$$

qui nous donne le système $B_1 + \lambda B_2 = 0$, $\lambda B_1 - B_2 = A$ dont les solutions sont $B_1 = \lambda A/(1+\lambda^2)$ et$B_2 = -A/(1+\lambda^2)$, ce que l'on peut aussi écrire $B_1 = A/\sqrt{1+\lambda^2}\cos(\phi)$ et $B_2 = A/\sqrt{1+\lambda^2}\sin(\phi)$, avec $\tan(\phi) = 1/\lambda)$. Et donc on obtient pour solution particulière:

$$T_{part}(t) = A\frac{\lambda\cos(\phi) - \sin(\phi)}{1+\lambda^2} = A\frac{\cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Pour obtenir la solution qui vérifie la condition initiale, on ajoute une solution de l'équation homogène. On obtient:

$$T_{rel}(t) = A\frac{\cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{1+\lambda^2}} + A\left(1 - \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)e^{-\lambda t}$$

Question subsidiaire: Quel est le comportement des solutions quand $\lambda \to +\infty$? Et quand $\lambda \to 0$?

(4) L'équation vérifiée par $T_{rel} = T - 25$ est $\dot{T}_{rel} = -\lambda(T + 25t^2)$. Il faut là aussi chercher une solution particulière sous la forme $T_{part}(t) = at^2 + bt + c$. On obtient

$$T_{rel}(t) = -25t^2 + \frac{50}{\lambda^2}(\lambda t - 1)\,,$$

et la solution recherchée, avec condition initiale $T_{rel}(0) = 25$ est donnée par:

$$T_{rel}(t) = -25t^2 + \frac{50}{\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t})\,.$$

On peut remarquer que le terme entre parenthèse est toujours positif car $e^x \geq 1 + x$, et donc qu'on a toujours $T_{rel} \geq -25t^2$, c'est-à-dire que l'objet est toujours plus chaud que l'air.

Question subsidiaire: Quel est le comportement des solutions quand $\lambda \to +\infty$? Et quand $\lambda \to 0$?

Exercice 5. Une masse m est posée sur un support et mise en oscillation par un dispositif. La vitesse de la masse est régie par l'équation :

$$mv' = \lambda\cos t - kv$$

où $\lambda\cos t$ correspond à l'oscillateur et $-kv$ à une force de frottement.

(1) Chercher une solution particulière sous la forme $\alpha\cos t + \beta\sin t$.

(2) Résoudre l'équation homogène associée pour trouver la solution générale puis utiliser la formule ci-dssous valable pour $t \in [0, 1[$:

$$v(t) = e^{A(t)}\left(\alpha + \int_0^t e^{-A(s)}\lambda\cos(s)\,ds\right)\,,$$

où $A(t) = -(k/m_0)\ln(1-t)$

Exercice 6. *Équation logistique*

(1) a est le taux de croissance (diférence du taux de mortalité et du taux de natalité). b est un terme de limitation de ressources: s'il y a trop de lapins, ils ne mangent plus leur faim, meurrent plus facilement et donc leur taux de croissance doit diminuer..

(2) On écrit

$$\frac{dx}{x(a-bx)} = dt\,.$$

Il faut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples. On obtient

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{a-bx}\right)dx = adt\,,$$

Ce qui s'intègre en $\ln(|x|/|a-bx|) = at + C^{ste}$, ou encore $x/(a-bx) = \lambda e^{at}$, avec λ constante réelle. Si $\lambda = 0$, c'est la solution nulle. Sinon peut exprimer x:

$$x(t) = \frac{a\lambda e^{at}}{1+b\lambda e^{at}} = \frac{a}{\lambda^{-1}e^{-at}+b}$$

Si $\lambda > 0$, la solution est croissante, avec $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} x(t) = a/b$.
Si $\lambda < 0$, on a deux branches de solutions, pour $t < t^* = -\ln(-b\lambda)/a$ et pour $t > t^*$. Dans le premier cas, ce sont les solutions négatives qui explosent vers les temps positifs et tendent vers 0 en $-\infty$. Dans le second cas, les solutions au dessus de a/b qui explosent vers les temps négatifs et tendent vers a/b en $+\infty$. Ces deux branches forment deux solutions bien distinctes, qu'on ne peux pas recoller. Une formule = 2 solutions. Il faut faire un dessin pour s'en convaincre.

(3) D'après l'énoncé, on pose $z(t) = (x(t))^{-1}$ et donc $x = z^{-1}$. On obtient

$$x' = -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{z}\left(a - \frac{b}{z}\right) = \frac{az - b}{z^2} \ ,$$

ou encore comme $z \neq 0$: $z' = -az + b$, donc les solutions sont de la forme

$$z(t) = \frac{b}{a} + \gamma e^{-at}$$

(4) $\lim_{t\to+\infty} x(t) = a/b$.

(5) il y a deux points d'équilibres. a/b est un équilibre stable et 0 est instable.

Exercice 7. *La goutte de pluie*

On suppose que la goutte garde toujours sa forme parfaitement sphérique. Alors, si r est son rayon, on a son volume $V = 4/\pi r^3$ et sa surface $S = 4\pi r^2$. Si l'évaporation a un débit proportionnel à V, alors $\dot{V} = -\lambda S$ ($\lambda > 0$). Avec les relations précédentes, on obtient:

$$\dot{V} = -\lambda' V^{2/3},$$

où l'on peut préciser que $\lambda' = \lambda 3^{2/3}/(4\pi)^{1/3}$, même si c'est inutile. Les solutions sont:

$$V(t) = \begin{cases} (V_0^{1/3} - \frac{\lambda' t}{3})^3 \text{ si } t \leq \frac{3V_0^{1/3}}{\lambda'} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Question subsidiaire: Les solutions sont-elles uniques?

Exercice 8. Les solutions sont de la forme $R/K + \lambda e^{-KT}$. Les solutions tendent vers l'équilibre stable R/K.

Exercice 9. *Les punaises*

C'est une équation de Bernouilli. On pose $z = N^{(-n+1)} = \sqrt{N}$, car $n = -1/2$ ici (ceci tant que $N \geq 0$). On obtient $N' = (z^2)' = 2zz' = r_1 z^2 - r_2 z$ et en simplifiant par z

$$z' = \frac{r_1 z - r_2}{2}$$

dont les solutions sont de la forme

$$z(t) = \frac{r_2}{r_1} + \left(z(0) - \frac{r_2}{r_1}\right) e^{r_1 t/2} \ ,$$

Ce qui donne

$$N(t) = \left(\frac{r_2}{r_1} + \left(\sqrt{N_0} - \frac{r_2}{r_1}\right) e^{r_1 t/2}\right)^2$$

Il y a un équilibre instable $(r_2/r_1)^2$ et un équilibre stable 0. On a $\lim_{N\to+\infty}(t) = +\infty$ si $N_0 > (r_2/r_1)^2$, et $\lim_{N\to+\infty}(t) = 0$ si $N_0 < (r_2/r_1)^2$. Le modèle n'est pas satisfaisant, la limite infinie si $N_0 > (r_2/r_1)^2$ n'a pas de sens, ou plutôt veux juste dire que l'on rentre dans un domaine où notre modèle n'est plus valable. Pour obtenir u modèle plus réaliste, on pourrait par exemple ajouter un terme de limitations de ressources et étudier l'équation

$$N' = (r_1 - kN)N - r_2\sqrt{N} \, .$$

Il semble difficile de résoudre analytiquement cette dernière équation, mais une étude qualitative, puis numérique est tout à fait possible.

2. Résolution analytique

Exercice 10. Les vérifications, sont des calculs, pas toujours faciles, mais sans difficultés et parfaites pour réviser les règles de dérivation.

Exercice 11. *EDO exactes.*
A faire en DM

Exercice 12. *Équations à variables séparables.*
1) Résoudre les équations différentielles à variables séparables :

a) $y = \lambda x$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$	b) bientt disponible
c) bientt disponible	d) $y = \left(\dfrac{a+x}{\lambda(a-x)}\right)^{1/2a}$

2) Les dx et dy sont pour les physiciens des petits accroissements. Ici, quand x augmente de dx, y augmente de dy de telle manière que $ydx - xdy = 0$. Leibniz a introduit cela en mathématiques en parlant d'accroissement infinitésimaux. En géométrie, les dx et dy sont des formes différentielles et l'EDO dit que sur la courbe $(x, y(x))$ qui nous intéresse, une certaine combinaison de ces formes différentielles s'annulle.

Exercice 13. *Équations homogènes.*
Correction bientôt disponible.

Exercice 14. a) On pose $z(x) = (y(x))^{-1}$ et on obtient pour z l'équation linéaire $(x^2-1)z' - x(z+a) = 0$. L'équation est a variables séparables.

$$\frac{dz}{z+a} = \frac{dx}{x^2-1} = \frac{dx}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right),$$

ce qui nous donne $2\ln|z+a| = \ln(|x-1|/|x+1|) + C^{ste}$. On obtient au final

$$y = \left(\lambda\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - a\right)^{-1}$$

b) On fait encore le changement de fonction inconnue $z(x) = (y(x))^{-1}$. On obtient:

$$z' \cos x = -z + \cos x(1 - \sin x).$$

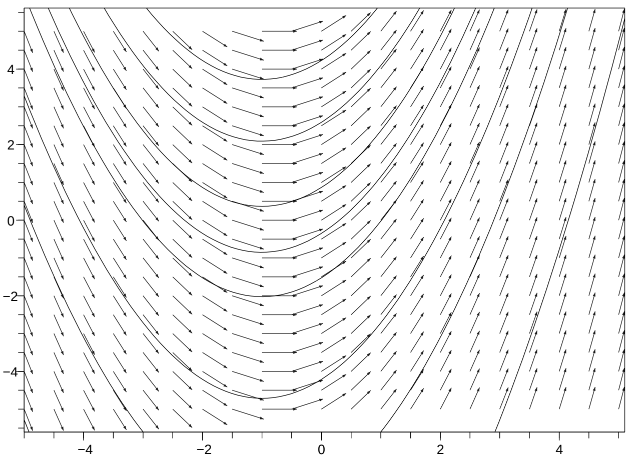
L'équation est bien sûr linéaire, mais à variables non séparables. On commence par résoudre l'équation homogène $z' - z/\cos x$. Grâce à une bonne mémoire (ou bonne table de primitive), on trouve que $\ln(|\tan(\frac{x}{2} + \pi 4)|)$ est une primitive de $1/\cos(x)$. Les solutions de l'éq. hom. sont donc de le forme $\lambda \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut alors utiliser la variation de la constante (assez long) ou remarquer que $z(x) = \cos x$ est solution. Ce qui nous la forme des solutions

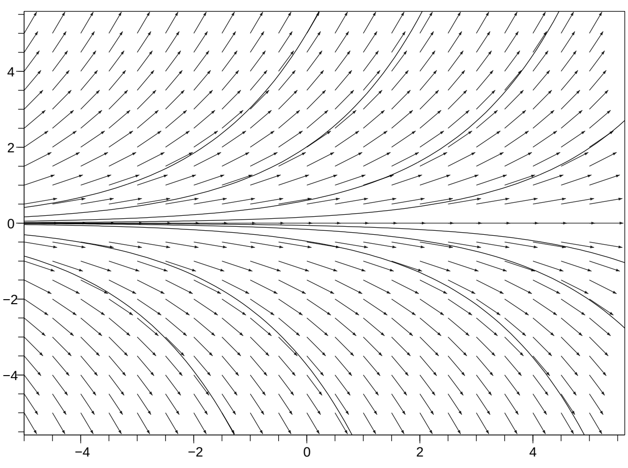
$$y(x) = \left(\lambda \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + \cos(x)\right)^{-1}$$

$y - y'\cos(x) = y^2\cos(x)(1 - \sin(x))$.

Exercice 15. *Équation* $y'' + n^2 y = \sin(bx)$
Les solutions de l'équation homogènes sont connues. On cherchera une solution particulière sous la forme $y(x) = \alpha\sin(bx) + \beta\sin(bx)$.

Exercice 16. Graphes ci-dessous.





Exercice 17. 1) $I_0 = \emptyset$, pente toujours définie, $x' = 2$.
2) $I_0 = \{x = 0\}$, pente toujours définie, $x' = x$.
3) $I_0 = \{x = t\}$, pente toujours définie, $x' = x - t$
A vous de jouer pour les derniers.