Université Paris 7 — L3 de maths appliqués et enseignement
2008-2009 — Deuxième semestre

Feuille 1 : Équations différentielles ordinaires et modélisation

1. Modélisation

Exercice 1. *Ligne d'horizon*

(Cet exo est là pour réviser l'analyse et n'a pas de rapport avec les EDO)
Un randoneur admire un océan d'un cap dégagé d"altitude h. A quelle distance d (en fonction de h) se situe sa ligne d'horizon (c'est-à-dire les points les plus lointain de la surface de la terre qu'il peut observer)? On donnera une approximation de d pour h petit.

Exercice 2. *Javelot*

Un lanceur de Javelot cherche l'angle optimal de son lancer (par rapport à l'horizontal) pour que son javelot aille le plus loin possible. Il se contenterait d'une réponse négligeant le frottement de l'air. Pouvez-vous l'aider?

Exercice 3. *Datation au carbonne 14*

Le carbone contenu dans la matière vivante contient une infime proportion d'isotope radio-actif C^{14}. Ce carbonne radio-actif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échange complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de C^{14} dans son carbone total, essentiellement composé de l'isotope stable C^{12}.

Après la mort, les échanges cessent et la quantité de carbonne radio-actif diminue : elle perd 1/8000 de sa masse chaque année. La proportion de C^{14} dans le carbone total perd donc elle aussi 1/8000 de sa valeur chaque année. Cela permet de déterminer la date de la mort d'un être vivant.

(1) Écrire l'équation différentielle satisfaite par la proportion de carbonne 14.
(2) Dessiner l'allure générale des solutions pour différentes conditions initiales.

Applications :

— *Datation de l'homme de Néanderthal.* Des fragments de squelette humain de type Néanderthal sont retrouvés dans une caverne en Palestine. L'analyse montre que la proportion de C^{14} n'est que de $6,24\%$ de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Quand cet individu a-t-il vécu ?

— *Datation de l'homme de Cro-Magnon.* En construisant une voie ferrée à Cro-Magnon en 1868, on découvrit des restes humains dans une caverne. Philip van Doren Stern, dans son livre *Prehistoric Europe* estime que cet homme vivait entre 30.000 et 20.000 ans avant J.C. Dans quelle fourchette se situe le rapport entre la population de C^{14} présent dans ce squelette et celle des os d'un être vivant ?

Exercice 4. D'après une loi due à Newton, le taux de refroidissement d'un corps plongé dans de l'air plus froid est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'air.

(1) Écrire l'équation différentielle satisfaite par la température.
(2) Si, dans de l'air à 20°, ce corps met 20 minutes pour passer de 100° à 60°, combien de temps met-il pour atteindre 30°.
(3) On regarde maintenant l'évolution de la température du sol. On suppose pour simplifier que la température de l'air varie de façon régulière : $T_{air}(t) = -5 + 35\cos(2\pi t/365)$, et que le sol et l'air ont initialement la même température.
(4) Même question avec une variation brusque de la température en une nuit : $T_{air}(t) = 25 - 25t^2$.

Exercice 5. Une masse m est posée sur un support et mise en oscillation par un dispositif. La vitesse de la masse est régie par l'équation :

$$mv' = \lambda \cos t - kv$$

où $\lambda \cos t$ correspond à l'oscillateur et $-kv$ à une force de frottement.

(1) Résoudre l'équation et déterminer la vitesse v.

(2) Le support est en fait un tamis et la masse diminue donc avec le temps : $m(t) = m_0(1 - t)$. Déterminer la vitesse v.

Exercice 6. *Équation logistique*

Des savants observent la population de lapins sur une île et ont remarqu que son volution satisfaisait l'quation (appelée équation logisitique):

$$x' = ax - bx^2 = ax\left(1 - \frac{b}{a}x\right).$$

(1) Proposer une interprtation pour les constantes a et b.
(2) Résoudre cette équation comme équation à variables séparées.
(3) Cette équation fait partie d'une autre famille d'équations : les équations de Bernouilli, c'est-à-dire les équations de la forme $x' = a(t)x + b(t)x^n$ avec $n \geq 2$ un entier et a et b deux fonctions. Dans la littérature, on trouve la "recette" suivante "*on pose* $z = x^{-n+1}$" ce qui veut dire "*on cherche des solutions de l'équation différentielle vérifiée par* $z(t) = \big(x(t)\big)^{-n+1}$". Pour cela, on écrit $x(t) = \big(z(t)\big)^{\frac{1}{-n+1}}$, on calcule $x'(t)$ en fonction de $z(t)$ et de $z'(t)$ et on remplace dans l'équation en x pour obtenir l'équation en z.
   Résoudre cette équation comme équation de Bernouilli.
(4) Que peut-on dire sur le comportement asymptotique de la solution quand la condition initiale x_0 est positive?
(5) Trouver les points d'équilibre de l'équation, et discuter leur stabilité.

Exercice 7. Une goutte de pluie sphérique s'évapore avec un débit proportionnel à sa surface. Écrire une formule donnant son volume V en fonction du temps.

Exercice 8. Des nutriments entrent dans une cellule à la vitesse constante de R molécules par unité de temps, et en sortent proportionnellement à la concentration : si N est la concentration à l'instant t, le processus ci-dessus se modélise par l'équation:

$$\frac{dN}{dt} = R - KN.$$

Intégrer cette équation. Y a-t-il un équilibre (*i.e.* une solution constante) ? La concentration va-t-elle tendre vers un équilibre (*i.e.* l'équilibre est-il stable) ?

Exercice 9. Une population de punaises vivant sur une surface plane se rassemble en une colonie ayant la forme d'un disque. Le taux d'accroissement naturel des punaises est r_1 ; de plus, les punaises situées à la périférie souffrent du froid et ont un taux de mortalité supplémentaire. Si N est le nombre total de punaises, le nombre de celles de la périphérie est proportionnel à $\sqrt{N}$. On trouve que la population N vérifie une équation

$$N' = r_1 N - r_2\sqrt{N}.$$

Résoudre l'équation (penser à faire un changement de variable) et dessiner quelques solutions de cette équation. Y a-t-il un équilibre (*i.e.* une solution constante) ? La population va-t-elle tendre vers un équilibre (*i.e.* l'équilibre est-il stable) ? Que pensez-vous du modèle ?

2. Résolution analytique

Exercice 10. Montrer que les fonctions définies ci-dessous satisfont aux équations différentielles en regard, C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires :

(a) $y\colon x \mapsto \sin(x) - 1 + C_1\exp(-\sin(x))$ — $2y' + 2y\cos(x) = \sin(2x)$
(b) $y\colon x \mapsto C_1\exp(ax) + \dfrac{\exp(x)}{(a-1)^2}$ $(a \neq 1)$ — $y'' - 2ay' + a^2y = \exp(x)$
(c) $y\colon x \mapsto C_1\exp(a\arcsin(x)) + C_2\exp(-a\arcsin(x))$ — $(1 - x^2)y'' - xy' - a^2y = 0.$

Exercice 11. *EDO exactes.*
Ce sont des équations qui s'écrivent: $M(t,x)x' + L(t,x) = 0\,,$
où M et L sont deux fonctions qui vérifient $\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial x}$.

1) Montrer que, ce cas, il existe une fonction F telle que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t} = L$. En déduire que les solutions de l'EDO vérifient $F(x(t),t) = C$, pour une constante C.
2) Applications: Donner les solutions des équations suivantes:

a) $(t^2 + x) + (t - 2x)x' = 0$ b) $(x^3 - t)x' = x$
c) $2(3tx^2 + 2t)dt - 3(2t^2x + x^2)dx = 0$ d) $\dfrac{xdx + (2x+y)dy}{(x+y)^2} = 0.$

Exercice 12. *Equations à variables sparables.*
1) Résoudre les équations différentielles à variables séparables :

a) $y - xy' = 0$ b) $(1 + x^2)dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$
c) $x^2dy + (y-a)dx = 0.$ d) $(x^2 - a^2)dy + ydx = 0.$

2) Les physiciens (et même certains mathématiciens, les géomètres) écrivent la première équation sous la forme $ydx - xdy = 0$. Comment comprenez-vous cette notation? Proposer des formes similaires pour les trois autres équations.

Exercice 13. *Équations homogènes.*
Ce sont des équations du type $x' = f(x/t)$, qui sont donc bien définies pour $t \neq 0$. On utilise pour les résoudre le changement de fonction inconnue $v(t) = x(t)/t$.
1)Montrez que v vérifie alors une équation à variables séparables.
2)Appliquer cette technique aux équations suivantes ci-dessous. Elles sont écrite “à la physicienne” (ou par un géomètre) et il faudra donc avant de commencer les ré-écrire sous l'écriture analytique.

a) $(x-t)dx + (x+t)dt = 0$ b) $tdx - xdt = \sqrt{x^2+t^2}\,dt$
c) $(2\sqrt{st} - s)dt + tds = 0$ d) $xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0.$

Exercice 14. Intégrer les équations différentielles de Bernoulli (pour la méthode, voir l'exo 6) :
a) $(1-x^2)y' - xy(1+ay) = 0.$
b) $y - y'\cos(x) = y^2\cos(x)(1 - \sin(x)).$

Exercice 15. Trouver la solution de l'équation $y'' + n^2y = \sin(bx)$ (où $b \neq n$ sont deux réels), satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = \alpha$ et $y'(0) = \beta$.

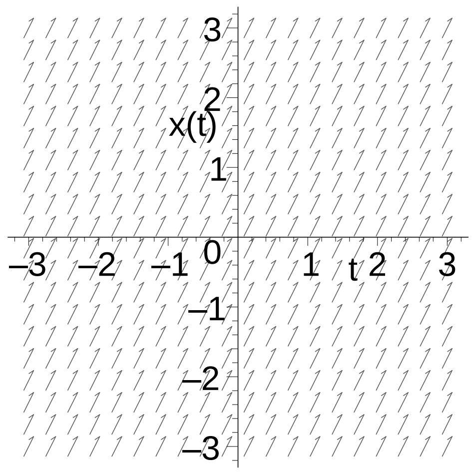
3. Résolution graphique

Exercice 16. Dessiner le champ de vecteurs et tracer quelques solutions pour les équations suivantes:
(1) $x' = -t + 1$
(2) $x' = -x/2$

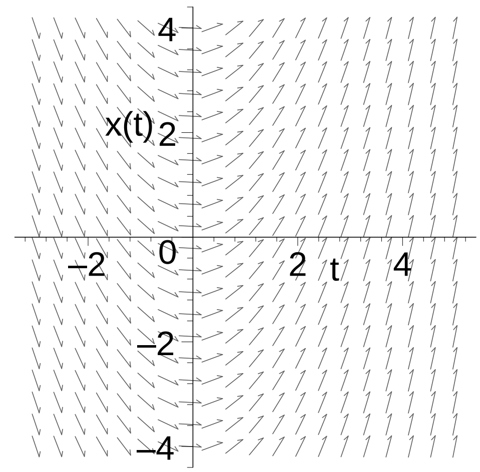
Exercice 17. Pour les dessins 1 à 6,
(1) Trouver l'isocline I_0 (l'ensemble des points où $y' = 0$).
(2) Trouver les points où la pente n'est pas définie.
(3) Dessiner quelques solutions
(4) Associer chaque dessin à l'une des équations ci-dessous :

$$x' = 2, \quad x' = x - t, \quad x' = x$$
$$x' = \tfrac{x}{t}, \quad x' = t, \quad x' = -\tfrac{t}{x}.$$

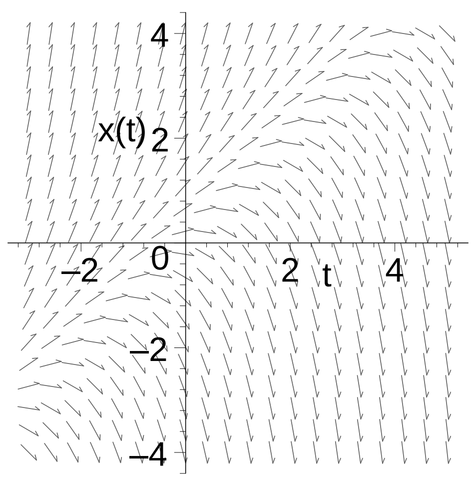
1)


x(t)
t
3
2
1
0
–1
–2
–3
–3
–2
–1
1
2
3

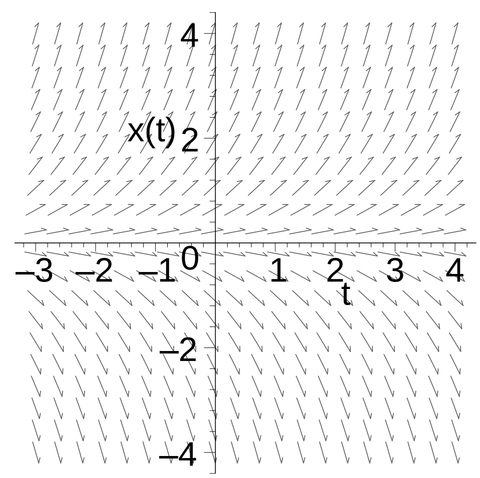
2)


x(t)
t
4
2
0
–2
–4
–2
2
4

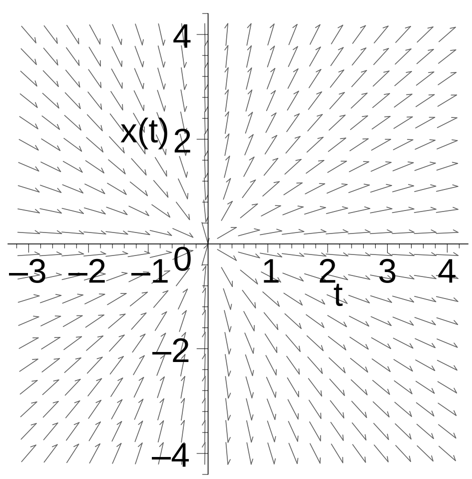
3)


x(t)
t
4
2
0
–2
–4
–2
2
4

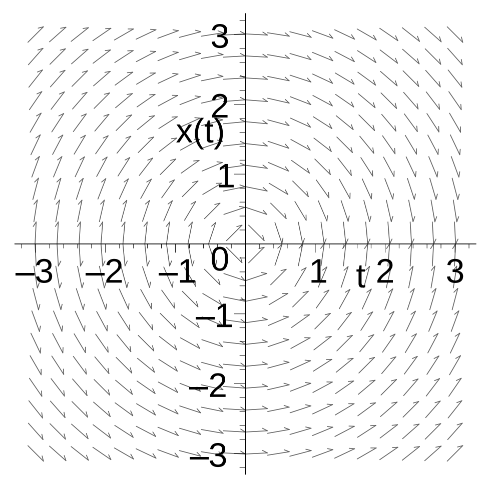
4)


x(t)
t
4
2
0
–2
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4

5)


x(t)
t
4
2
0
–2
–4
–3
–2
–1
1
2
3
4

6)


x(t)
t
3
2
1
0
–1
–2
–3
–3
–2
–1
1
2
3