Équations Différentielles Ordinaires — L3 Maths
2008-2009 — Second semestre

Seconde feuille d'exercices

Exercice 1. *Equations linéaires*
Résoudre les équations différentielles linéaires suivantes (la variable étant x):

a) $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y = ax^3$. b) $y' + \dfrac{n}{x}y = \dfrac{a}{x^n}$.
c) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$. d) $y' + y = \exp(-x)$.

Exercice 2. Résoudre les EDO suivantes:

a) $\forall t, \quad (x(t) - \alpha) + t^2 x'(t) = 0$ b) $\forall t, \quad (1+t^2)x'(t) = (1 + x(t)^2)$
c) $\forall t, \quad x'(t) + x\cos t = (\sin t)/2$ d) $\forall t, \quad x'(t) + (n/t)x(t) = \alpha/t^n$
e) $\forall x, \quad y'(x) = e^t\, y^2$ f) $\forall x, \quad y'(x) = 2xy(x) + x^3$

1. Solutions globales et Lemme de Gronwall

Exercice 3. *Problèmes de domaine.*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
1) On suppose que f vérifie $\forall t,\ \forall x \neq 0,\ x\, f(t,x) < 0$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ sont définies jusqu'à $+\infty$ et admettent une asymptote horizontale. Préciser laquelle?
2) On supose maintenant que l'équation est à variables séparables, i.e. que $f(t,x) = g(x)\, h(t)$, et que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et h de classe $\mathcal{C}^0$. On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g. Et on choisit une condition initiale t_0, x_0, avec $x_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer qu'alors la solution maximale telle que $\phi(t_0) = x_0$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3) Application:
a) Résoudre explicitement l'équation $x' = x(x-1)\cos(t)$
b) Montrer qu'aucune solution autre que les solutions constantes ne possède d'asymptote horizontale. Peut-on raisonner sans utiliser la forme explicite des solutions?
c) Dessiner l'allure générale des solutions, en distinguant suivant la position de $\phi(0)$ par rapport à 0 et 1.

Exercice 4. *Explosions ou solutions globales?*
1) Donner les solutions de

$$x' = x^\beta \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0\,,$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de β les solutions "explosent"? Pour quelle valeur de β sont-elles globales (définies sur tout $\mathbb{R}$).
2) Donner les solutions de

$$x' = x(\ln x)^\beta \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0\,,$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$ (On pensera à utiliser le changement de variable $y = \ln(x)$). Pour quelle valeur de β les solutions "explosent"? Pour quelle valeur de β sont-elles globales (définies sur tout $\mathbb{R}$).

Soit $I =]a,b[$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ds}{h(s)}$ diverge et que $\forall\, t, x,\ |f(t,x)| \leq h(|x|)$.
On pose $G(y) = \displaystyle\int_1^y \frac{ds}{h(s)}$, pour $y \geq 0$. Soit $x : U \to \mathbb{R}$ une solution maximale de $x' = f(t,x)$.
3) On pose $\phi(t) = G(|x(t)|)$. Calculer la dérivée de ϕ aux points où elle est définie. Montrer que G est bornée sur tout compact de I. En déduire que $U = I$, c-à-d que la solution est globale.

2. Unicité des solutions

Exercice 5. *Le seau qui se vide*
On considère un seau de rayon A, percé en son fond d'un trou de rayon a. Il est rempli d'eau jusqu'à la hauteur h, et cette eau coule du trou à la vitesse v.
1) Ecrire l'équation de conservation de l'eau et l'‘équation de conservation de l'énergie. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la hauteur d'eau dans le seau. Cette équation est la *loi de Torricelli tablie vers 1640.*
2) Résoudre cette équation (uniquement pour les temps t positifs). Peut-on appliquer ici le théorème de Cauchy-Lipschitz? Les solutions (pour $t > 0$) de cette équation sont-elles uniques?
3) Une fois le seau vide, on cherche à savoir quand il était plein. Pour cela, on inverse le sens du temps dans l'équation (i.e. on fait le changement de variable $t = -t'$). Montrer que l'équation devient

$$\frac{dx}{dt'} = \sqrt{|x|}.$$

Y-a-t'il de solutions de cette équation qui vérifient $x(0) = 0$? Si oui, les donner toutes. Comparer avec les résultats connus sur l'unicité des solutions d'une EDO. Expliquer mathématiquement pourquoi, quand le seau est vide, on ne peut plus savoir quand il a commencé à se vider.

Exercice 6. *Unicité des solutions: une amélioration par rapport au théorème de Cauchy-Lipschitz.*
Soit $I =]a,b[$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{ds}{h(s)}$ diverge et que $\forall\, t, x, y,\ |f(t,x) - f(t,y)| \leq h(|x|)$.
On pose aussi $G(y) = \displaystyle\int_y^1 \frac{ds}{h(s)}$, pour $y \geq 0$.
Soit $x_1, x_2 : U \to \mathbb{R}$ deux solutions maximales de $x' = f(t,x)$ telles que $x_1(0) = x_2(0) = \tilde{x}$.
1) On pose $\rho(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. Montrer que ρ vérifie l'inéquation différentielle

$$\rho'(t) \leq h(\rho(t))$$

2) En déduire que $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout temps t.
3) Application: Combien l'EDO $x' = x\ln(x)^{1/2}$, possède-t-elle de solutions vérifiant $x(0) = 0$? Pourrait-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz dans ce cas?

Exercice 7. *Lemme de Gronwall et inégalités différentielles.*
Voici un énoncé de théorème:

Théorème 1. *Soient b_1 et b_2 deux champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tels que*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad b_1(t,x) < b_2(t,x),$$

soient (I_1, ϕ_1) la solution maximale de $x' = b_1(t,x)$ passant par (t_0, x_0),
et (I_2, ϕ_2) la solution maximale de $x' = b_1(t,x)$ passant par (t_0, x_0).
Alors, on a, avec $I = I_1 \cap I_2$,

$$\begin{aligned} &\forall t \in I,\, t > t_0, \qquad \cdots > \ldots \\ &\forall t \in I,\, t < t_0, \qquad \cdots < \ldots \end{aligned}$$

1) Remplir correctement les pointillés et démontrer le théorème obtenu.
2) Adapter le théorème au cas où b_1 et b_2 vérifient $\forall\, t, x,\ b_1(t,x) \leq b_2(t,x)$, au lieu de l'inégalité stricte.
3) On suppose que b_2 est un champ linéaire à coéfficients constants, $b_2(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t)$. Réécrire le théorème en utilisant la forme explicite de la solution de l'EDO linéaire. A quoi le résultat vous fait-il penser?
4) Êtes-vous d'accord avec la phrase: " le lemme de Gronwall n'est en fait qu'une banale inégalité différentielle?"

Exercice 8. Pour chaque EDO ci-dessus

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x' = sin(tx) & \text{b) } y' = sh(y) \\ \text{c) } z' = z^3 & \text{d) } u' = -u^3 \\ \text{e) } v' = \dfrac{1}{1+v} & \text{f) } w' = |w|^{3/4} \quad , \end{array}$$

répondre aux trois questions suivantes:
- Les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont-elles bien vérifiées? Si la réponse est non, où sont les problèmes?
- Les solutions maximales sont-elles définies jusqu'à $+\infty$ ou explosent-elles en temps fini (pour les temps croissants)? (Il est possible de résoudre explicitement les équation pour répondre)
- Même question pour les temps négatifs.

Exercice 9. EDO et symétries.
Certaines propriétés de symétries de la fonction $f(t,x)$ entraînent des propriétés de symétries pour l'ensemble des graphes des solutions, et parfois même pour chacune des solutions. Mais d'autres propriétés similaires n'entraînent aucune symétrie. Nous allons le voir en étudiant quelques exemples.

1) On suppose que $f(-t,x) = -f(t,x)$, *i.e.* les pentes des points symétriques par rapport à l'axe des x sont opposées.
a) Montrer que dans ce cas, l'ensemble des solutions est symétrique par rapport à l'axe des x (c-à-d que si $t \mapsto y(t)$ est solution sur I, alors $t \mapsto y(-t)$ est solution sur $-I$), et que les solutions définies pour $t = 0$ sont paires. b) Le vérifier en calculant les solutions de $x' = tx$.

2) Si $f(-t,x) = f(t,x)$, les pentes en des points symétriques par rapport à l'axe des x sont égales.
a) Trouver la forme explicite des solutions de $x' = t^2 - x$.
b) En déduire que cette symétrie de f n'entraîne aucune propriété de symétrie.

3) Dire, dans les quatre derniers cas de symétrie ci-dessous, si les solutions ont une propriété de symétrie, et laquelle.

$$f(t,-x) = f(t,x) \qquad f(t,-x) = -f(t,x)$$
$$f(-t,-x) = f(t,x) \qquad f(-t,-x) = -f(t,x)$$

4) Récapituler les résultats obtenus en associant à chaque symétrie des solutions (centrale et par rapport aux deux axes), la propriété que doit vérifiée f.

5)Etudier les propriétés de symétries des solutions de

$$x' = tx, \quad x' = tx^2, \quad x' = x/t$$

Exercice 10. *Infusion de glucose dans le sang.*
En médecine, l'infusion désigne l'injection dans le sang d'une substance à débit constant (par exemple, grace à une perfusion). On va proposer ici à un modèle pour une infusion de glucose, à débit constant. Pendant celle-ci, le glucose libre du sang disparait, par combinaison avec du phosphore. La concentration $G(t)$ de glucose dans le sang augmente donc grâce à l'infusion et diminue avec un débit proportionnel à $G(t)$ par combinaison.

1) Écrire l'EDO vérifée par $G(t)$ (on notera a le débit de l'infusion de glucose, λ le taux de recombinaison et B le volume de sang de l'individu). Résoudre et donner le comportement asymptotique des solutions.

2) On suppose maintenant que l'infusion de glucose augmente le volume de sang de façon non négligeable. Proposer un nouveau modèle et reprendre la question précédente.