Univ. Paris Diderot L3 Maths
Équations Différentielles $2^{nd}$ semestre 2008-2009

**Correction de l'exercice 1 de la troisième feuille d'exercices**

**Exercice 1.** *Une bifurcation simple.*
1) L'analyse qualitative conduit aux dessins répartis (plus ou moins judicieusement) ci-dessous:

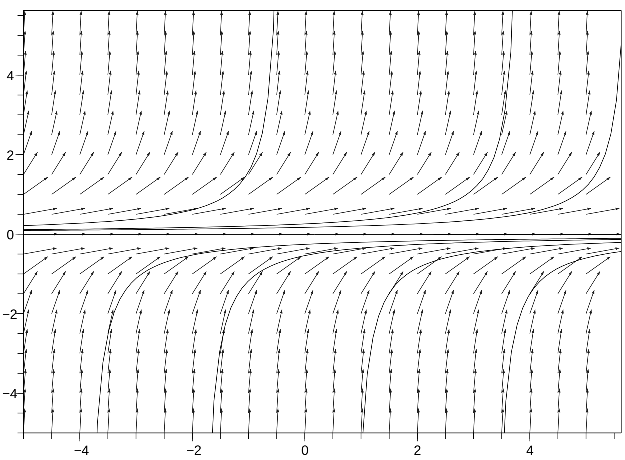


Figure 1. Allure des solutions de $x' = x^2$

Tous ces problèmes sont autonomes (le membre de droite de dépend pas du temps), donc en particulier à variables séparables. Après réflexion, on obtient que:

- les solutions de $x' = x^2$ sont de la forme
$$x(t) = \left(\frac{1}{x_0} - (t - t_0)\right)^{-1}$$
- les solutions de $x' = x^2 + 1$ sont de la forme
$$x(t) = \tan(t - t_0 - \arctan(x_0))$$
- les solutions de $x' = x^2 - 1$ sont de la forme
$$x(t) = \frac{\lambda + e^{-(t-t_0)}}{-\lambda + e^{-(t-t_0)}} \quad \text{avec } \lambda = \frac{x_0 - 1}{1 + x_0}$$

2) Quand on a écrit les solutions en fonction des conditions initiales, le flot est connu. Il suffit de fixer $t_0 = 0$ et de considèrer $x_0$ comme une variable. On obtient par exemple pour le premier système le flot $\Phi_1$
$$\Phi_1(t, x_0) : \begin{array}{ccc} D_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x_0) & \mapsto & \left(\frac{1}{x_0} - t\right)^{-1} \end{array}$$

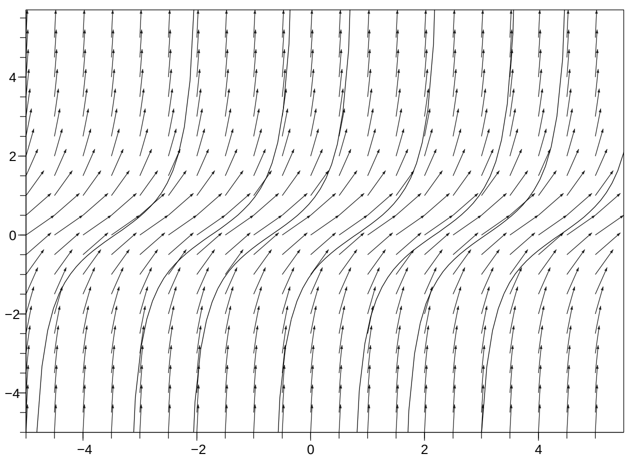


FIGURE 2. Allure des solutions de $x' = x^2 + 1$

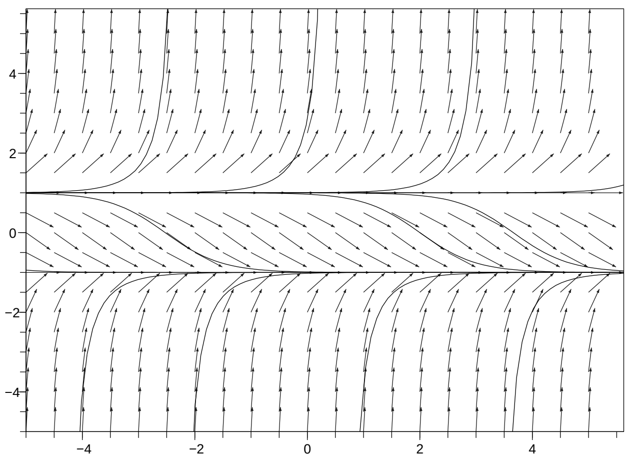


FIGURE 3. Allure des solutions de $x' = x^2 - 1$

où $D_1 = \{0 < x_0 \text{ et } t < x_0^{-1}\} \cup \{0 > x_0 \text{ et } t > x_0^{-1}\}$. Il faut en effet limiter le domaine de $\Phi_1$ car les solutions explosent.
Dans le second cas, on obtient $\Phi_2$:

$$\Phi_1(t, x_0) : \begin{array}{ccc} D_2 & \to & \mathbb{R} \\ (t, x_0) & \mapsto & \tan(t - \arctan(x_0)) \end{array}$$

où $D_2 = \{0 < |t - \arctan(x_0)| < \pi/2\}$. On notera que dans tous les cas, le flot est une fonction régulière de la condition initiale. C'est-à-dire que si on perturbe légérement la condition initiale, les solutions restent proches.

3) D'après les études qualitatives de la question 1, ce qui importe pour la forme des trajectoires est lié au nombre de points d'équilibre, donc au nombre de racines du membre de droite. Pour

faire apparaître ce nombre de racines, on se ramène à la forme canonique:

$$x' = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

En posant $\Delta_0 = \sqrt{|\frac{b^2-4ac}{4a^2}|}$, et $y = x - \frac{b}{2a}$ (ce qui implique $x' = y'$), on obtient:

$$y' = a(y^2 \pm \Delta_0^2) = a\Delta_0^2\left(\left(\frac{y}{\Delta_0}\right)^2 \pm 1\right)$$

suivant le signe de $b^2 - 4ac$, le plus ou moins venant juste du fait qu'on a considéré la valeur absolue de $(b^2 - 4ac)/4a^2$. On change encore de fonction inconnue: $z(t) = y(t)/\Delta_0$, ce qui donne

$$z' = \frac{y'}{\Delta_0} = a\Delta_0(z^2 \pm 1)\,.$$

Pour se débarasser de la dernière constante, il faut changer l'échelle de temps, c-à-d considérer $h(t) = z(t/a\Delta_0)$. en effet, on obtient alors:

$$h'(t) = \frac{z'(t/a\Delta_0)}{a\Delta_0} = z(t/a\Delta_0)^2 \pm 1 = h(t)^2 \pm 1\,.$$

On ferra attention que si $a < 0$, l'orientation du temps est inversée entre $h$ et $z$. Pour récapituler, on a effectué le changement de fonction inconnue:

$$h(t) = z(t/a\Delta_0) = \frac{y(t/a\Delta_0)}{\Delta_0} = \frac{x(t/a\Delta_0) - \frac{b}{2a}}{\Delta_0}$$

Comme le changement est affine en $x$ et linéaire en $t$, cela ne modifie pas la forme générale des solutions. Dans tous les cas, l'étude qualitative de $x' = ax^2 + bx + c$ aménera donc à un des systèmes étudiés à la question 1. A noter que si $a < 0$, il faut modifier le sens de parcours des solutions (de droite à gauche), ou encore faire une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. Finalement, la forme globale des solutions sera celle de $(E_0)$ si $ax^2 + bx + c$ possède une racine double, celle de $(E_+)$ s'il ne possède pas de racines et celle de $(E_-)$ s'il y a deux racines distinctes.

4) Pas par un changement de variables car si c'était le cas, ils auraient tous les deux des points d'équilibres. Or $(E_+)$ n'en a pas.

5) Cela dépend du signe de $b^2 - 4ac$. Si $a$ est fixé, on obtient une parabole. A l'intérieur de celle-ci, on se comporte comme $(E_-)$. Sur celle-ci, comme $(E_0)$ et à l'extérieur comme $(E_+)$. Si les paramètres sont vraiment à l'extérieur ou l'in'érieur de la parabole, ils vont y rester après une petite modification de leur valeur, et dans ce cas la forme globale des solutions ne sera pas changée. Par contre, si les paramètres étaient initiallement sur la parabole, une toute petite modification de ceux-ci peut les faire rentrer à l'intérieur ou sortir à l'extérieur de la parabole. Dans ce cas, la forme globale des solutions sera globalement complètement modifée. C'est ce qu'on appelle en mathématique une bifurcation voire aussi une catastrophe. La parabole est la zone ou peuvent se produire ces catastrophes. Il est très important de connaître ces zones car quand une fois qu'on y est rentré, il est très difficile de prévoir ce qui va se passer.