Univ. Paris Diderot | L3 Maths
Équations Différentielles | 2^{nd} semestre 2008-2009

Troisième Feuille d'exercices

Exercice 1. *Une bifurcation simple.*
On considère la famille ($\mathcal{E}$) d'équations dépendant de trois paramètres a, b, c:

$$x' = ax^2 + bx + c.$$

Commencons par étudier les trois cas particuliers ci-dessous:

$$\begin{array}{ll} (E_0) & x' = x^2 \\ (E_+) & x' = x^2 + 1 \\ (E_-) & x' = x^2 - 1 \end{array}$$

1) Dans chacun des cas, étudier l'EDO. Donner nottamment le comportement qualitatif et l'expression analytique de la solution passant par (t_0, x_0), ainsi que son *domaine* (intervalle maximal de définition contenant t_0).

2) Écrire le flot associé à cette équation, c'est-à-dire la fonction $\phi(t, x)$ qui satisfait les deux conditions suivantes:
- $\phi(t, x)$ est la valeur en t de la solution qui vaut x à $t = 0$.
- son domaine de définition est le plus grand ouvert connexe contenant $\{0\} \times \mathbb{R}$.

3) Retournous à la forme générale ($\mathcal{E}$). Montrer que, grâce à un changement de variable inconnue affine $z(t) = \alpha x(t) + \beta$, et un changement de variable temporelle linéaire $t' = \gamma t$, on peut se ramener à une des trois équations particulières ci-dessus. Précisez quelles sont celles qui se ramènent à (E_0), (respectivement (E_+) et (E_-)).

4) Peut-on passer de (E_0) a (E_+) par un changement de variable?

5) On suppose a fixé. Tracer sur un graphe en b et c, les domaines ou l'équation $x' = ax^2 + bx + c$ se comporte comme (E_0), (E_+) et (E_-). Supposons que les paramètres a, b, c soient ceux d'un système biologique et qu'ils soient succeptibles de subir des petites variations quasi-aléatoires. Que va-t-il se passer si les paramètres a, b, c se situent bien à l'intérieur d'un des domaines? Et s'ils sont près de la frontière d'un des domaines?

Exercice 2. *Des équations à résoudre sur la réciproque.*
On considère l'équation différentielle suivante:

$$(1) \qquad x' = \frac{x^3}{1 + tx^2}$$

1) Montrer qu'il s'agit en fait de trois équations différentielles définies dans des domaines de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

2) Soit $\tilde{x}$ une solution de l'EDO. On suppose que $t \mapsto \tilde{x}(t)$ est un C^1-difféomorphisme, et on note sa réciproque $x \mapsto \tilde{t}(x)$. Montrer qu'en écrivant $t'(x) = \frac{dt}{dx}$ dans (l), on se ramène à une équation différentielle linéaire $(1')$ à trouver. La résoudre.

3) Déterminer grâce à la question précédente les solutions maximales de (1) en précisant leurs intervalles de définition.

4) Les équations (1) et $(1')$ sont-elles complétement équivalentes?

<u>Remarque:</u> *En géométrie différentielle, on écrirait cette équation sous la forme*

$$(1+ty^2)\,dx + y^3 dt = 0,$$

où le terme de gauche est une forme différentielle qu'on annule. On cherche alors une sous-variété sur laquelle la forme différentielle ci-dessus s'annule. Cette manière de résoudre est plus générale que (1) *et* (1′).

5) On s'intéresse maintenant à l'équation de Lagrange suivante

$$(1) \qquad y = y'(y'-2t)\,.$$

(Les équations de Lagrange sont du type $y = a(t)y' + b(y')$ et sont très importantes en mécanique).
a) Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz?
b) Cherchez les solutions affines de cette équation.
c) Dériver l'équation par rapport au temps et poser $p = y'$. On obtient une EDO vérifiée par $t \mapsto p(t)$.
d) Comme ci-dessus, écrire l'équation vérifiée par la fonction réciproque $p \mapsto t(p)$.
e) Résoudre cette équation. Cela donne un paramétrage du graphe des solutions $p \mapsto (t(p), p(p-2t(p)))$.

6) On s'intéresse maintenant à l'équation de Clairaut suivante

$$(2) \qquad y = y'(t+1-y')\,.$$

(Les équations de Clairaut sont un cas particulier d'équation de Lagrange, quand $a(t) = t$ et sont aussi très importantes en mécanique).
a) Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz?
b) On cherche donc les solutions affines de (2) sous la forme $y(t) = a + by$. Quelles sont les valeurs de a et b possibles?
c) Reprendre la question 5 c).
d) Montrer que si les fonctions p ne sont pas constantes, elles vérifient une équation simple.
e) Donner toutes les solutions de l'équation initiale.
f) Représenter ces solutions sur un graphique. Qu'observe-t-on?

Exercice 3. *Équation des membranes vibrantes.*
On considère, sur $\mathbb{R}$, l'équation

$$x' = 1 + \frac{cos^2 x}{4t^2}.$$

1) Etudier les symétries de l'ensemble des solutions. Montrer que les solutions sont globales.
2) Trouver à l'aide de majoration et minoration du membre de droite, des inégalités différentielles vérifiées par la fonction $y(t) = x(t) - t$.
3) En déduire que y converge vers une limite que l'on notera y_∞, puis que x admet pour asymptote $t + y_\infty$.
4) y_∞ dépend de la condition initiale $x(0) = x_0$. Pour montrer cette dépendance on notera $y_\infty(x_0)$. Montrer que y_∞ est une fonction croissante de x_0.

Exercice 4. *Quotas de pêche.*
Cet exercice est une application de l'exercice 1 sur les solutions de $x' = ax^2 + bx + c$.
1) On s'intéresse maintenant à l'étude d'une population x de poissons. En l'absence de pêche, on modélise son évolution grâce à une équation logisitique (dont les coefficents ont été normalisés):

$$x' = x(1-x)$$

Retrouver les solutions de ce système et rappeler leurs proprits qualitatives.
2) Pour incoporer la pêche dans le modèle, on commence par proposer de rajouter un terme constant négatif $-c$, le quota de pêche que l'on supposera toujours rempli. La population de poisson satisfait alors:

$$x' = x(1-x) - c\ .$$

Montrer qu'il y a une valeur critique c_c de c à partir de laquelle la pêche fait disparaître les poissons. Ce sera théoriquement le quota maximal pour préserver l'espèce. Y'a-t-il des risques à placer le quota juste à en-dessous de cette valeur critique?

3) Une autre possibilité est de fixer un quota de pêche linéaire en fonction de x (solution rendu possible par la surveillance des populations de poissons). On obtient ainsi une nouvelle équation:

$$x' = x(1-x) - p\,x$$

a) Montrer qu'il y a aussi une valeur critique p_c de p à partir de laquelle la pêche fait disparaître les poissons.
b) Si p est inférieur à p_c, montrer que les solutions tendent alors vers un équilibre non nul x_{eq}, à calculer en fonction de p. La quantité de poisson pêchée sera donc, en régime stationnaire (c'est-à-dire quand x est proche de sa limite), de px_{eq}. Comment maximiser cette quantité? Quelle est sa valeur maximale?
c) Y'a-t-il un risque à placer le quota relatif p à ce maximum? Quel système de quota choisiriez-vous si vous tiez responsable des ressources halieutiques?

Remarque: Qu'en est-il des quotas de pêche dans la réalité? De nombreuses observations ont montré que l'homme a dépassé depuis quelques temps les quantités de pêche critique pour de nombreuses espèces , comme le cabillaud dans l'Atlantique, le thon rouge ou le Mérou dans la Mditrranne (Pour plus de précision, voir les rapports du Conseil Internationnal pour l'Exploitation de la Mer). Des systèmes de quota ont étés petit à petit mis en place, d'abord des limites globales du premier type, puis des quota dépendants du stock de poissons comme dans le second modèle. Quotas qui ne permettent pas encore d'assurer la survie des espèces de poissons. Mais, avec cette évolution, la gestion des populations halieutiques (i.e. de poissons) demande maintenant des bonnes connaissances en Mathématiques et en systèmes dynamiques. Un nouveau débouché pour les mathématiques?

Exercice 5. *La Chenille de l'épicéa.*

La chenille de l'épicéa vit surtout principalement sur les sapins baumiers de l'Amérique du Nord (ainsi nommés car ils produisent une gomme utilisée en optique et en pharmacie sous le nom de "Baume du Canada"). Il arrive que sa population augmente considérablement et ravage les arbres de plantations. Des chercheurs ont entrepris de modéliser le comportement de la population dans le but de la contrôler. Ils ont proposé le modèle adimensionné suivant:

$$u' = \rho u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{u^2}{1+u^2},$$

où u est proportionnel à la population de chenilles, et ρ et$k$ sont deux paramètres positifs.. On écrira parfois dans la suite cette équation sous la forme $u' = ug(u)$ avec le g qui convient.

1) Reconnaître dans cette EDO le terme de reproduction, le terme de limitation des ressources, et le terme de prédation. Reconnaissez-vous l'équation logistique avec un terme supplémentaire?

Remarque: Le terme de prédation a été choisi de telle manière à avoir une pente nulle en 0 car les oiseaux prédateurs de ces chenilles sont des prédateurs non-spécifiques. Quand les chenilles disparaissent, ils se délectent d'autres insectes. Et le terme admet une limite en $+\infty$, car la population des prédateurs est limitée par d'autres facteurs que la quantité de chenilles disponibles, comme le nombre d'emplacement pour nicher...

2) Tracer sur un même dessin les graphes de $u/(1+u^2)$ et de $\rho(1-u/k)$. En déduire que l'équation admet 2 ou 4 points d'équilibres, suivant les valeurs de ρ et k. Discuter la stabilité de ces points d'équilibres (on remarquera qu'en un point d'équilibre, la dérivée du champ vaut $u_{eq}g'(u_{eq})$, dont on peut lire le signe sur le dessin).

3) Reconnaître sur le graphe ci-dessous, les zones ou il y a 2 ou 4 équilibres.

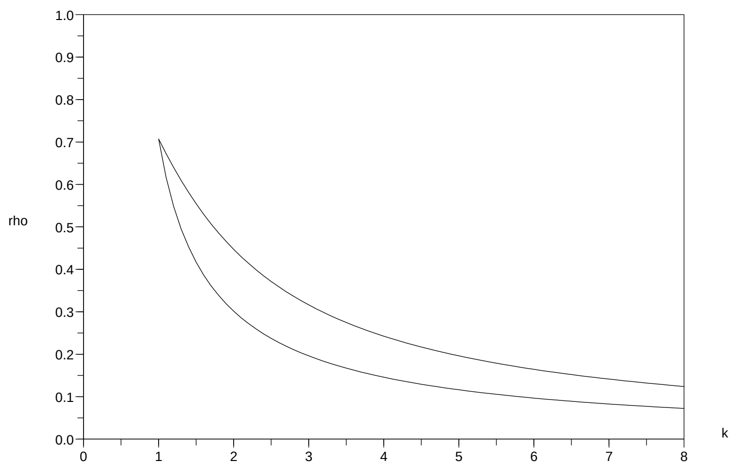

FIGURE 1. Nombres de pts d'équilibre en fonction de k et ρ

4) a)On suppose qu'initiallement, ρ et k sont dans la zone ou il y a 4 équilibres, et que la population de chenilles est petite (u_0 positif très proche de 0). Que va-t-il se passer? Autour de quelle valeur la population de chenille va se stabiliser?

b) Au bout d'un certain temps, l'environnemment change et ρ (ou k) augmente jusqu'à ce que le couple de paramètres rentre dans la zone à 2 équilibres. Que va-t-il se passer après ce changement? Quel est le nouvel équilibre stable pour notre population?

c) Après un temps assez long, ρ (ou k) diminue et les paramètres reviennent dans leur position initiale. Que va-t-il se passer?

d) Que faudrait-il faire pour que la population revienne à son équilibre initial?