Université Denis Diderot — L3

Équations Différentielles — **2008/2009**

Cinquième Feuille d'exercices

Exercice 1. *Systèmes en dimension* 2.

1) Rappeler la forme des trajectoires d'un système linéaire $Y' = AY$, en dimension deux, dans les cas ou les valeurs propres de la matrice sont, complexes conjuguées, réelles de même signe, ou réelles de signes opposés.

2) Dessiner l'allure des trajectoires pour les systèmes suivants:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

3) Donner la dimension de l'espace des solutions pour chacun des systèmes. Calculer les résolvantes associées à ces systèmes.

Exercice 2. *Résolvantes*

1) Calculer les solutions de la partie homogènes systèmes ci-dessous (où t est la variable temporelle) avec pour conditions initiales $(1, 0)$ ou $(1, 0, 0)$ suivant la dimension.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 3y + e^t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 3y - 2z + \cos(t) \\ y' = -2x + 5y - 2z \\ z' = -x + y - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4y - 3z - t \\ y' = -2x + 5y - 2z \\ z' = -x + 2z \end{cases}$$

2) Calculer les résolvantes de la partie homogène de ces systèmes .

3) Résoudre les systèmes d'équations suivants avec des conditions initiales quelconques (x_0, y_0) ou (x_0, y_0, z_0)

Exercice 3. Équations diverses à résoudre

a) $x' = x + t^2$

b) $x'' - 3x' + 2x = e^{-t}$

c) $x'' - 2x' + x = \sin(t)$

d) $x'' + x = 0.$ _ e) $x'' + x' + x = 0.$

f) $x'' - 12x' + 9x = 0.$

g) $x'' - x = 5t + 2.$

h) $x'' + 6x' + 5x = \exp(2t).$

i) $x'' + 4x = 2\sin(2t).$

pour les conditions initiales x_0 où (x_0, x'_0).

Exercice 4. *Le pendule amorti.*

On accroche une masse m à un ressort dans un milieu ou elle est soumise à un frottement fluide. On notera x la position de la masse par rapport à son équilibre (ressort non tendu ni compressé). D'après le principe de Newton, l'équation vérifiée par la masse est:

$$\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - k\,x\ ,$$

où les points désignent la dérivée et λ, k deux constantes positives.

1) Identifier ces deux constantes. On pose $z(t) = x\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t\right)$. Montrer que z vérifie:

$$\ddot{z} = -2\alpha\dot{z} - z\ ,$$

pour un α que l'on précisera.
2) On se ramène à un système pour résoudre cette équation. On pose $v = \dot{z}$ (avec un v pour vitesse). Montrer qu'il existe une matrice A telle que le couple $Z = (z, v)$ vérifie alors le système d'EDO linéaire ci-dessous:

$$\dot{Z} = A\,Z.$$

Préciser la matrice A. Par quelle formule est donnée la solution Z d'un tel système?
3) Calculer le polynôme caractéristique de A, et préciser ses valeurs propres en fonctions de α.
4) Cas $\alpha > 1$.
a) Montrer que les solutions z s'écrivent: $z(t) = \beta_1 \exp^{\mu_1 t} + \beta_2 \exp^{\mu_2 t}$, ou les μ_i sont les deux valeurs propres de A.
b) Faire deux dessins donnant la forme des solutions en fonction du temps et dans l'espace des phases (x, v).
c) Exprimez β_1 et β_2 en fonction des conditions initiales $z_0 = x_0$ et $v_0 = 0$.

5) Cas $\alpha < 1$. On pose $\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$.
a) Montrer que z peut s'écrire:

$$z(t) = \exp^{-\alpha t}(\beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)).$$

Déduire de cette expression la forme des solutions.
b) On suppose qu'à $t = 0$, la masse qui était retenue en x_0 est soudain liberée. Que vaut la condition initiale de Z? Exprimer β_1 et β_2 en fonction de ces conditions initiales. c) On supose les conditions initiales quelconques, exprimer β_1 et β_2 en fonction de celles-ci.
c) Vérifier que dans le cas où $\alpha = 0$, on obtient bien les résultats du pendule sans frottement.

6) Cas $\alpha = 1$.
a) Montrer que les solutions sont de la forme $z(t) = e^{-t}(a + b\,t)$.
b)Exprimer a et b en fonction des conditions initiales (x_0, v_0), pour un v_0 non forcément nul.