Sixième feuille d'exercices: Correction des 2 premiers exercices.

Exercice 1. *Résonnance*
1) Une base de solution est $(\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t))$. La solution de conditions initiales (x_0, v_0) est

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

2) La solution du probème avec terme source est donnée par la formule de Duhamel

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega_0 (t-s))}{\omega_0} g(s)\, ds$$

Il faut interprèter le terme source g ainsi: à chaque instant s, on ajoute une petite quantité $g(s)ds$ à la dériviée x'. En effet, on peut ré-écrire l'équation $dx' = -\omega_0 x ds + g(s)ds$, a laquelle il faut ajouter $dx = x'dt$ qui ne change pas. A chaque instant s, on ajoute donc 0 à x et $g(s)ds$ à x'. Une fois la quantité ajouter, celle-ci évolue comme la solution du problème homogène qui vérifie $x(s) = 0$ et $x'(s) = g(s)ds$. Comme le problème est autonome, cette solution n'est autre que $\sin(\omega_0(t-s))/\omega_0 \times g(s)ds$. Il suffit après d'ajouter toutes ces solutions avec l'intgrale pour obtenir la formule ci-dessus.

3) Dans ce cas particulier, on va utiliser pour simplifier les calculs

$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)\,.$$

En effet:

$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin(\omega_0(t-s))}{\omega_0} \cos(\omega s)\, ds = \int_0^t \frac{\sin(\omega_0 t + (\omega - \omega_0)s) - \sin(\omega_0 t - (\omega + \omega_0)s)}{2\omega_0}\, ds$$

Si $\omega \notin \{-\omega_0, \omega\}$, alors

$$\begin{aligned}
S(t) &= \frac{1}{2\omega_0}\left[-\frac{\cos(\omega_0 t + (\omega - \omega_0)s)}{\omega - \omega_0} + \frac{\cos(\omega_0 t - (\omega + \omega_0)s)}{\omega + \omega_0}\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2\omega_0}\left(-\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0} + \frac{\cos(-\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega + \omega_0}\right) \\
&= \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

On peut vérifier que l'on a bien $S(0) = 0$ et $S'(0) = 0$.

Si $\omega = \omega_0$, alors on a

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \frac{\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t - 2\omega_0 s)}{2\omega_0}\, ds \\ &= \frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} + \left[\frac{\cos(\omega_0 t - 2\omega_0 s)}{4\omega_0^2}\right]_0^t \\ &= \frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0} \end{aligned}$$

Dans le cas $\omega = -\omega_0$, on obtient la même formule pour S car le terme source est identique au cas $\omega = \omega_0$ (cos est une fonction paire). On peut aussi vérifier que $S(0) = 0$ et $S'(0) = 0$.

Pour $\omega \notin \{-\omega_0, \omega\}$, les solutions sont bornées, et l'on a

$$\|x\|_\infty \leq |x_0| + |v_0| + \frac{2}{|\omega_0^2 - \omega^2|}\,.$$

s Dans le cas $\omega \in \{-\omega_0, \omega\}$, les solutions ne sont pas bornées. Elles sont la somme d'un terme oscillant bornée, et d'un terme oscillant dont l'amplitude vaut t/ω_0.

4) Dans le cas, $\omega \notin \{-\omega_0, \omega\}$, on cherche une solution particulière sous la forme

$$x_{part}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

On obtient alors

$$x''_{part}(t) + \omega_0^2 x_{part}(t) = (\omega_0^2 - \omega^2)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

Ce qui nous donne par identification

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{et } B = 0$$

et donc la solution particulière $\frac{\cos(\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Il reste à ajouter une solution de l'équation homogène pour ajuster les conditions initiales.
Dans le cas $\omega = \omega_0$, il faut chercher une solution de la forme

$$x_{part}(t) = t(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t))\,.$$

On obtient

$$x''_{part}(t) = 2(-A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega\cos(\omega_0 t)) - \omega_0^2 x_{part}(t)\,,$$

et par identification, on en déduit que $A = 0$ et $B = 1/2\omega_0$. Ce qui donne bien comme solution particulière

$$x_{part}(t) = \frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}$$

5) La question revient à montrer que la limite du terme ci-dessous, à t fixé, existe et vaut

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}\,.$$

Pour cela, on utilise la dérivée de cos en $\omega_0 t$, qui est $\omega_0 \sin(\omega_0 t)$. On sait que

$$\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \underset{\omega \to \omega_0}{\sim} \sin(\omega_0 t)(\omega - \omega_0)t\,,$$

et donc que

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2} &\underset{\omega \to \omega_0}{\sim} \frac{\sin(\omega_0 t)(\omega - \omega_0)t}{\omega_0^2 - \omega^2} \\
&\underset{\omega \to \omega_0}{\sim} \frac{t \sin(\omega_0 t)}{\omega_0 + \omega} \\
&\underset{\omega \to \omega_0}{\to} \frac{t \sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement la solution particulière de $x'' + \omega_0^2 x = \cos(\omega_0 t)$ et prouve donc bien la continuité des solutions par rapport au terme source.

Exercice 2. *Flots autonomes.*

1) seul $x \mapsto x^2$ n'est pas bijective. $x \mapsto x^3$ et bien bijective, mais sa dérivée s'annulle en 0 est son inverse $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ n'est donc pas dérivable en 0. C'est donc un homéomorphisme, mais pas un difféomorphisme. Les trois autres sont des difféomorphismes. La dernière est une application strictement croissante, avec $\lim_{x \to -\infty} x - 1/2\sin(x) = -\infty$, et $\lim_{x \to +\infty} x - 1/2\sin(x) = +\infty$, et sa dérivée ne s'annule jamais (elle est toujours supérieure à 1/2), donc c'est un difféomorphisme.

2) a) est un groupe de transformation à un paramètre.

$$g^{s+t}(x) = x + (s+t) = (x+s) + t = g^t(x+s) = g^t(g^s(x))$$

. Et de même $g^{s+t}(x) = g^s(g^t(x))$. Et g est C^∞ par rapport à s et x.
b) l'est aussi.
c) n'en est pas un. Car g^0 doit forcément être l'identité dans un tel groupe, et içi $g^0(x) = x/\sqrt{1+x^2}$.
d) n'en est pas un. Car $g^2(x) = 5x \neq g^1(g^1(x)) = g^1(2x) = 4x$.
e) en est un. Car chacune de ses composante est un groupe de transformation à un paramètre et elles sont indépendantes les unes des autres.
f) En est un aussi car $R(\theta) \circ R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
3) Il faut utiliser la propriété des flots autonomes qui dit que partir de x, et avancer dans le temps le long des trajectoires de s puis de t revient à avancer directement de $(s+t)$. Le caractère C^1 par rapport à s découle de l'équation vérifiée par g.

4) Pour trouver le flot et le groupe associé, il faut rśoudre les équations pour des conditions initiales (x_0, y_0). Pour le premier, on a $x' = 1$ donc $x(t) = x_0 + t$, ce qu'on rentre dans la seconde équation: $y' = x_0 + t$. On obtient aussi $y(t) = y_0 + x_0 t + t^2/2$. Le groupe est donc ici

$$g^s(x, y) = (x + s, y + sx + s^2/2)$$

Pour le second champ de vecteur, on obtient $g^s(x, y) = R(s)(x, y)$. Par exemple en calculant l'exponentielle de la matrice associée à ce problème linéaire.

5) Ici les solutions vérifiant $x(0) = x_0$ sont données par

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

Le problème que cette formule n'est pas définie pour tout temps, mais seulement pour $t < (x_0)^{-1}$. On peut définir un flot partiel

$$X(t, x_0) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

mais cela ne définit pas un groupe de transformation à un paramètre.

6) et 7) Non corrigées ici.