Sixième feuille d'exercices: Flots et changements de variables.

Exercice 1. *Résonnance*
On étudie dans cet exercice un oscillateur harmonique de fréquence ω_0, qui vérifie donc l'équation:

$$(1) \qquad \ddot{x} + \omega_0 x = 0$$

1) Donner la forme exacte de la solution vérifiant $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.
On ajoute une contrainte (ou force extérieure, ou terme source) dépendante du temps $g(t)$. C'est-à-dire que l'on cherche les solutions de l'équation

$$(2) \qquad ddotx + \omega_0 x = g(t)$$

2) Montrer que la solution de (2) vérifiant $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ est:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + v_0 \sin(\omega_0 t) + \int_0^t \frac{\sin(\omega_0(t-s))}{\omega_0} g(s)\, ds$$

3) Simplifier l'expression ci-dessus dans le cas où $g(t) = \cos(\omega t)$, pour $\omega \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de ω toutes les solutions sont-elles bornées? Pour quelle valeur ne le sont-elles pas?
Remarque: Ce phénomène s'appelle la résonance. Quand on exite un oscillateur à sa fréquence propre, celle à laquelle il oscille sans intervention extérieure, les oscillations qui apparaissent ne sont pas bornées. En fait, au bout d'un certain temps, il apparait en général un phénomène de saturation, les oscillations ne croissent plus car on a atteint des valeurs pour lesquelles l'approximation linéaire n'est plus valable. Car il faut savoir que le linéaire très pratique et très utile n'est souvent qu'une approximation valable dans un certain cadre. Voir le théorème de linéarisation par exemple.
4) Autre possibilité de résolution: vous savez d'après le cours que lorsque le second membre est de la forme $e^{\rho t}\cos(\omega t)$, il faut chercher des solutions de la forme $e^{\rho t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ si $\rho + i\omega$ n'est pas racine du polynôme associé, et sous la forme $e^{\rho t} t (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$ si $\rho + i\omega$ est racine simple (et avec t remplcé par t^2 si A est racine double. Appliquer cette règle pour trouver les solutions de (2).
5) Vérifier la continuité des solutions par rapport au second membre, lorsque $\omega \to \omega_0$. C'est-à-dire, si pour tout ω, $x_\omega(t)$ désinge la solution de (2) vérifiant $x(0) = x_0$ et $x'(0) = v_0$ (déjà calculée plus haut), est-ce que pour tout temps t fixé, $x_\omega(t) \to x_{\omega_0}(t)$ quand $\omega \to \omega_0$?

Exercice 2. *Flots autonomes.*
Sur $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}^2$, ou une partie ouverte de ces ensembles, on appelle groupe de transformation à un paramètre une famille $(g^s)_{s\in\mathbb{R}}$, d 'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) telle que:
- pour tout $s \in \mathbb{R}$, g^s est un difféomorphisme,

- pour tout s, $t \in \mathbb{R}$, $g^{s+t} = g^s \circ g^t = g^t \circ g^s$,
- g est aussi $\mathcal{C}^1$ par rapport à s.

On peut résumer cette définition en disant que l'application $s \to g^s$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe des difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans lui-même (ceci explique le nom de groupe de transformation). Que vaut forcement g^0?

Remarque: On note aussi $g^s(x) = X(s, x)$, avec les mêmes définitions. C'est la notation utilisée dans le cours.

1) Rappel: Parmi les fonctions $x, -x, x^2, x^3, x + (1/2)\sin(x)$, quelles sont celles qui définissent un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

2) Parmi les différentes familles ci-dessus, quelles sont celles qui sont des groupes de transformations.

$$\text{a) } x \to x + s, \qquad \text{b) } x \to e^s\, x, \qquad \text{c) } x \to e^s \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$\text{d) } x \to (1+s^2)\, x, \quad \text{e) } (x,y) \to (e^{\alpha s}\, x, e^{\beta s}\, y), \quad \text{f) } (x,y) \to R(s\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où $R(\theta)$ est la rotation directe d'angle θ.

3) Considérons l'équation $x' = x$. On définit une famille g^s d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante. $s \to g^s(x)$ sera la solution de notre EDO passant par $(0, x)$. Montrer que l'on défini ainsi un groupe de transformation à un paramètre.

De cette manière, on peut associer un groupe de transformation à un paramètre à toute EDO, à la condition expresse que les solutions soient globales. Ce groupe de transformation s'appelera le flot associé à une EDO. Toutes les équations et champs de vecteurs déjà étudiés permettent de définir des flots si leur solutions sont globales.

4) Quel est le flot associé aux champs de vecteurs

$$\text{a) } v(x,y) = (1, x), \qquad \text{b) } w(x,y) = (-y, x) \quad ?$$

5) On choisit l'EDO $x' = x^2$. Essayez de définir un groupe de transformation de la même manière que pour le 2). Que se passe-t-il? Pourquoi la condition sur les solutions globales est importante? En fait, on peut aussi définir un flot *local* dans ce cas, qui vérifie les trois conditions du 1) tant qu'il est défini (Quel est-il?). Mais cela ne définit plus un vrai morphisme de groupe.

On va voir maintenant qu'à tout groupe de transformations (g^s) à un paramètre peut-être associé un champ de vecteurs. On rappelle qu'une telle famille (g^s) est dérivable en s. On pose

$$v(x) = \left. \frac{d}{ds} g^s(x) \right|_{s=0}$$

6) Montrer, en utilisant la propriété de groupe $g^{s+\varepsilon} = g^\varepsilon \circ g^s$, que les $s \to g^s(x)$ sont les solutions de l'EDO $x' = v(x)$.

7) Trouver les champs de vecteurs associés aux groupes de transformations de la question 2.

On peut trouver plus de détails sur le sujet dans le bon livre de V. Arnold *Equations différentielles ordinaires.*

Exercice 3. *Changement de variable et cercle attracteur.*
Soit v un champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^2$. On s'intéresse aux solutions de l'équation

$$x' = v(x).$$

Il arrive souvent que le problème soit mal posé dans la variable x, etqu'il faille écrire à nouveau le problème dans une nouvelle variable. On introduit alors un changement de variable, $x = f(y)$. Le terme changement de variable signifie que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (ou une partie de $\mathbb{R}^2$) dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Notre problème est de savoir que devient l'équation après ce changement de variable?
1) Soit ϕ une solution de $x' = v(x)$, et soit $\psi = f^{-1} \circ \phi$ son image par f^{-1}. Quelle est l'équation vérifiée par ψ? Quel champ de vecteur w est tel que les solutions de $y' = w(y)$ soient les images par f^{-1} des solutions de $x' = v(x)$?
Application: on considère le champ suivant défini sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases}$$

2) Que devient cette équation en coordonnées polaires (r, θ), définies par

$$(x_1, x_2) = f(r, \theta) = r\,(\cos\theta, \sin\theta)?$$

En déduire l'expresssion des solutions, en coordonnées polaires, puis cartésiennes.

Dans la pratique, on utilise jamais formellement cette méthode. On écrit plutôt que si $x_1 = r\cos\theta$, alors

$$dx_1 = \cos\theta dr + r\sin\theta d\theta.$$

Puis on remplace dx_1 dans les équations ci-dessus:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\cos\theta dr + r\sin\theta d\theta}{dt} = x_2 = r\cos(\theta).$$

3) Faire de même pour x_2 et la seconde équation. Quel système déquation sur (r, θ) obtient-on?
Remarque: Cette méthode peut paraître non rigoureuse, mais elle l'est en fait totalement. En géométrie différentielle, les termes dx, dr, $d\theta$ sont des appelées formes différentielles, et toutes les opérations éffectuées ici peuvent être rigoureusement justifiées.

On considère maintenant le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x_2} = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

4)a) Que devient ce système en coordonnées polaires?
b) Faire une étude qualitative du système en (r, θ).
c) Dessiner les trajectoires avec en abscisse θ et en ordonnée r.
d) En déduire un dessin des solutions du système initial, en coordonnées cartesiennes. Pourquoi le cercle centré en l'origine et de rayon 1 est-il appelé cercle limite?

5) Faire une étude qualitative (avec dessin des trajectoires) des solutions du système:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = (x_1^2 + x_2^2)x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x_2} = -(x_1^2 + x_2^2)x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{cases}$$

On se ramenera pour l'étude en coordonnées polaires.

Exercice 4. *Systèmes mécaniques et stabilité.*
On considère une masse $x \in \mathbb{R}^n$, soumis à une force conservative, ce qui signifie qu'il existe une énergie potentielle E_p et que la force s'écrit $-\nabla E_p$. On supposera pour l'étude que l'énergie est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. L'équation vérifiée par x est donc:

$$\ddot{x} = -\nabla E_p(x)$$

1) On introduit la vitesse $v = \dot{x}$ de notre point. Écrire le système d'EDO du premier ordre vérifié par le couple (x, v).

2) Que vérifient les points d'équilibre? Que sont-ils pour l'énergie E_p?

On introduit l'énergie totale du système $E_t = E_p(x) + \frac{1}{2}v^2$

3) Montrer que l'énergie totale reste constante le long des trajectoires du système.

4) Applications: On suppose que la masse est un ressort soumis à une force de rappel égale à $-kx$, avec $k > 0$. Retrouver l'énergie potentielle puis l'énergie totale. Même question pour un ressort mou, avec une force de rappel égale à $-kx^3$.

On retourne au cas général et on choisit un point d'équilibre x_0. On pose $y = x - x_0$ et on considère le système linéarisé au voisinage de x_0.

5) a)Ecrire ce système linéarisé, et donner les conditions pour qu'il soit stable, instable. En déduire des conditions pour que le système initial soit stable ou instable.

b) Appliquer ces résultats aux deux exemples ci-dessus. Cela s'applique-t-il au second cas?

6) Dans le cas du pendule mou, dessiner le graphe de l'énergie potentielle en fonction de la position, et déduire d'un raisonnement graphique que le point d'équilibre est stable.

On ajoute maintenant au système une force de frottement non conservative. Il devient:

$$\ddot{x} = -\nabla E_p(x) - f(v)v,$$

avec une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et positive.

7) a) Montrer que cette fois l'énergie totale est décroissante le long des trajectroires.
b) On reprend les deux applications précédentes en leur ajoutant une force de frottement avec $f(v) = 1$. Montrer que dans ces deux cas le point d'équilibre est devenu asymptotiquement stable.

Exercice 5. *Système proies-prédateurs de Lotka-Volterra*
Le système ci-dessus a été introduit par Lotka pendant la première guerre mondiale pour expliquer l'augmentation des prises de requins, relativement à celles de sardines durant cette période.

$$\begin{cases} x' = x(1-y) \\ y' = \alpha y(x-1) \end{cases} .$$

Ici, α est un paramètre positif. Plus généralement, on utilise ce système pour modéliser l'évolution des populations de deux espèces, quand l'une sert de nourriture à l'autre. Pour la suite du problème, x et y étant des populations, on se resteindra au quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

1) On suppose qu'initialement, $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$. Montrer que la solution vérifiera alors $x(t) = 0$ tant qu'elle sera définie. Quelle sera alors l'équation vérifiée par y? En déduire le comportement du système dans ce cas, pour t croissant.

2) Reprendre la question précedente, avec cette fois-ci $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$ et en inversant x avec y dans les questions.

3) Déduire des deux études précedentes qui de x ou de y représente la population des proies et celle des prédateurs.

4) Déterminer les lieux ou le champ de vecteur est horizontal et celui où il est vertical. Dessiner ces courbes et en déduire la direction du champ dans les différentes régions délimités par ces deux courbes.

5) Trouver les points d'équilibres du système. Discuter leur stabilité.

On définit la fonction $H(x, y) = \alpha x + y - \log(x^\alpha y)$.

6) Montrer que cette fonction reste constante le long des trajectoires. Calculer sa Hessienne et montrer que c'est une fonction convexe, qu'elle est coercive, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} H(x, y) = +\infty.$$

En déduire que les courbes de niveau de H sont bornées.

7) Montrer que les courbes de niveau de H sont fermées. On admettra que ces courbes fermées et bornées sont alors homéomorphes à des cercles, plus précisement que ce sont des chemins fermés, c'est-à-dire qu'on peut les paramètrés par une fonction continue $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\phi(0) = \phi(1)$. (Cela peut-être démontré en utilisant le théorème des fonctions implicites). Faire un dessin approximatif des trajectoires, en étudiant le signe des conposantes de $f(x, y) = (x(1 - y), \alpha y(x - 1))$.

8) En déduire que les solutions sont périodiques.

9) Montrer que

$$\frac{d}{dt} ln(x) = 1 - y$$

En déduire la valeur moyenne de y sur une période. Faire de même avec x.

Calculer la valeur moyenne de x et de y au cours du temps (Il faudra supposé y connu, utiliser la première équation pour écrire x sous forme d'une intégrale dépendant de y et utiliser la périodicité de x pour déduire la valeur moyenne de y).

Exercice 6. *Compétition entre deux espèces.*

Le système ci-dessous modélise l'évolution des populations de deux espèces vivant sur le même terriotoire, et se nourrissant des mêmes ressources.

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - \mu_1 y) \\ y' = \rho y(1 - \mu_2 x - y) \end{cases} .$$

On se restreindra pour l'étude au quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.

1) Expliquer les différents termes de ce système. Les deux membres de droite ressemblent-ils ceux de l'équation logisitque?

2) Faire l'étude de ce système en fonction des paramètres. On étudiera les trajectoires avec $x = 0$, puis $y = 0$. Pourquoi la restriction proposée plus haut est-elle justifiée? Etudier ensuite

l'orientation du champ, les points d'équilibre et leur stabilité, le comportement au voisinage de ces points, toujours en fonction de ces paramètres. On finira par faire, dans chacun des régimes observés selon la valeur des paramètres, un dessin complet représentant le portrait de phase du systéme (dessin d'un certain nombre de trajectoires dans l'espace (x, y)).

3) Que doivent vérifier les paramètres pour qu'aucune des espèces ne finisse par s'éteindre?