**Université René Diderot** **2008-2009**
**TP d'Équations Différentielles Ordinaires** **L3 Maths**

---

## Feuille 3: Cauchy-Lipschitz et résolution numérique

---

**(1)** **Champ de vecteurs.** Un champ de vecteurs sur $R^2$ est une application $f$ de $R^2$ dans $R^2$. La subtilité est que les antécedents sont des points de $R^2$ et les images des vecteurs de $R^2$. On les représente en dessinant en certains points $(x_1, x_2)$ de $R^2$, la flèche d'origine ce point et de composantes $f(x_1, x_2)$.
Scilab sait faire cela. Définir d'abord dans Scilab la fonction $f(t, x) = [x_2, x_1]$ avec $x = (x_1, x_2)$ ($t$ est important sous Scilab même s'il n'apparaît pas dans les calculs) et taper les instructions suivantes:

```
X=-4:.5:-4 ;
fchamp(f,0,X,X)
```

Que se passe-t-il? Consulter l'aide de la fonction `fchamp` pour comprendre la syntaxe. Essayez de tracer d'autres champs de vecteurs pour des fonctions de votre choix.

**(2)** On définit maintenant la fonction suivante:

$$g(x) = \begin{cases} (\sqrt{|x|}, \sqrt{|x|}) & \text{si } y \geq x \geq 0 \text{ ou } y \leq x \leq 0 \\ (\sqrt{|x|}, -\sqrt{|x|}) & \text{si } y \geq -x \geq 0 \text{ ou } y \leq -x \leq 0 \\ (\sqrt{|x|}, \frac{\operatorname{sign}(x) y}{\sqrt{|x|}}) & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

La fonction sign désignant simplement le signe de $x$.

Les fonction $f$ et $g$ sont-elle continues? De classe $C^1$?
Tracer les deux champs de vecteurs avec Scilab. Le résultat confirme-t-il vos réponses?

**(3)** Écrire un programme Scilab nommé `EDO_bruit` qui résoud par la méthode d'Euler explicite sur $R^2$ l'EDO $x' = f(x)$ avec une petite incertitude sur la condition initiale. Les variables d'entrée seront `(xy_0,dt,Tfinal,s)` où `xy_0` est le vecteur des conditions initiales (à $t = 0$), `dt` le pas de temps utilisé, `T_final` le temps final, et `s` l'incertitude sur la donnée initiale (on utilisera pour celle-ci la fonction `rand`). La fonction doit afficher la solution (et de préference n'avoir aucune sortie).

**(3)** Écrire un programme Scilab nommé `repet_EDO` qui se contente de répèter $n$ fois le programme `EDO_bruit` avec les mêmes entrées. Ce programme aura donc comme variables d'entrée `(n,xy_0,dt,Tfinal,s)`.

**(4)** Utiliser ce programme avec la condition initiale `xy_0=[-3,1]` et les paramètres `n=10`, `T_final=2`, `s=1D-2` et `dt=.1`. Que remarque-t-on? Diminuer l'incertitude $s$. Qu'observe-t-on? Diminuer le pas de temps. Qu'observe-t-on? Et si l'on modifie la condition initiale?

**(5)** Remplacer $f$ par $g$ dans le programme `EDO_bruit` et recharger le fichier. Utiliser le "nouveau" programme `repet_EDO` avec la condition initiale `xy_0=[-.1,.1]` et `n=10`, `T_final=1`, `s=1D-8` et `dt=.1`. Que remarque-t-on? Recommencer avec les mêmes valeurs sauf $dt$ que l'on remplacera par `dt=.01`, puis `dt=.001`, et `dt=.0001`. Que constate-t-on?

**(6)** Que se passait-il quand on diminuait le pas de temps avec la fonction $f$? Que se passe-t-il ici? Faire l'étude théorique des solutions de l'EDO $x' = g(x)$ et expliquer le phénomène observé ici?