Université Paris 7 **2008-2009**
TP d'équations Différentielles Ordinaires **L3 Maths**

Feuille 5: Linéarisation d'une EDO du second ordre

Une équation différentielle ordinaire (EDO par la suite) du second ordre peut toujours se ramener à une EDO du premier ordre, dans un espace de dimension plus grande. Précisément, pour une équation du type

$$y'' = f(t, y, y')\,, \tag{1}$$

on pose $Z = {}^t(Z_1, Z_2) := {}^t(y, y')$ (l'exposant t pour transposée) et on obtient:

$$Z' = \begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_2 \\ f(t, Z_1, Z_2) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

On est donc ramené à l'étude d'un EDO du premier ordre sur $\mathbb{R}^2$ du type $Z' = A(t, Z)$ avec $A(Z) = {}^t(Z_2, f(t, Z_1, Z_2))$.

Scilab étant un logiciel très performant dans le calcul matriciel, on va l'utiliser pour résoudre des équations du second degré.

(1) Programmer, avec la méthode de votre choix, une fonction Scilab `solEDO_deg2` qui résoud l'équation $y'' = f(y, y')$ avec $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_0'$ donnés, pour une fonction f à préciser plus tard. Plus précisement, la fonction `solEDO_deg2` prendra en entrée, les conditions initiales, le pas de temps, le temps final, et donnera en sortie une matrice $3 \times n_p$ (ou n_p est le nombre de pas de temps nécessaires) qui contiendra les temps ou la solution est calculee sur la première ligne, la valeur de y sur la seconde et la valeur de y' sur la troisième.

(2) Utiliser votre fonction pour résoudre $y'' = -y$ et $y'' = -\sin(y)$. Dans les deux cas, on tracera sur un même graphique y et y' en fonction du temps. On tracera sur un autre graphique [1] les trajectoires correspondantes dans l'espace des phases (y en abscisse et y' en ordonnées).

(3) Scilab possède une commande `ode` (l'abbréviation de Ordinary Differential Equation) toute faite qui permet de résoudre les EDO. La syntaxe est la suivante

```
Y=ode(y0,t0,t,f)
y0: condition initiale        t0 : temps initial
t: vecteur des temps ou la solution doit etre calculee
f: fonction ( dont la syntaxe doit etre f(t,y) )
```

Cela fonctionne très bien dans le cas ou y est un vecteur. Utiliser cette fonction préprogrammée avec les EDO de la question 2 et comparer les résultats.

(3) L'équation $y'' = -y$ peut-être résolue explicitement. Donner la solution en fonction de y_0 et y_0'. Comparer la graphiquement avec les deux méthodes numériques utilisées. Montrer numériquement que la quantité $E = (y')^2/2 - \cos(x)$ (l'énergie pour les physiciens) est conservée au cours du temps.

---

[1] la commande `xset(''window'',i)` permet d'ouvrir d'activer une (nouvelle) fenêtre graphique numérotée i.

(4) Montrer que la quantité $E = (y^2 + (y')^2)/2$ (l'énergie pour les physiciens) est conservée au cours du temps si y est solution de $y'' = -y$. Cette propriété est très utile pour juger la précision d'une méthode de résolution numérique. On calcule cette quantité pour une solution numérique donnée et on trace son graphque en fonction du temps. Si l'énergie reste constante, la méthode est peut-être fiable, par contre si elle n'est pas conservée, la méthode n'est pas fiable. Vérifier la conservation pour votre méthode numérique et la fonction préprogrammée dans Scilab, pour différents pas de temps. Que conclure?

(5) Les physiciens utilisent l'approximation $\sin(x) \approx x$ quand x est petit pour dire que les solutions de $y'' = -\sin(y)$ peuvent-être approchée par celles de $y'' = -y$. Comparer les solutions des deux systèmes pour différentes conditions initiales (grandes ou petites) et discuter la validité de l'approximation.