Second contrôle de Td

Mercredi 19 Décembre 2007

L'énoncé comporte deux pages. Le port de calculatrice est prohibé. Durée 1h30.

Partie 1. Intégration

1) Citer le Théorème de dérivabilité sous l'intégrale.

2) Soit $f(t,x)$ de $[0,1]\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en les deux variables. On suppose qu'il existe une fonction intégrable $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ telle que:

$$\forall(t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R},\ \max\left(|f(t,x)|,\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\right)\leq g(x)$$

3) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ est intégrable sur $[0,1]\times\mathbb{R}$.

4) On pose $G(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$.

a) Montrer que G est bien définie.

b) On choisit s_1 et s_2 dans $[0,1]$, avec $s_1<s_2$. Montrer que $\displaystyle\int_{[s_1,s_2]\times\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial t}\,dtdx=\int_{s_1}^{s_2}G(s)\,ds$.

5) On pose $F(s)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(s,x)\,dx$.

a) Montrer que F est bien définie.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{[s_1,s_2]\times\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial t}\,dtdx=F(s_1)-F(s_2)$.

6) En déduire que $F(s_1)-F(s_2)=\displaystyle\int_{s_1}^{s_2}G(s)\,ds$. Quel théorème vient-on de redémontrer?

7) Soit B_1 la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme euclidienne. Calculer $\displaystyle\int_{B_1}x^2\,dxdy$

Partie 2. Analyse Numérique Matricielle

Dans cette partie, si $x\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2$ désigne la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1)

a) Donner la définition de la norme subordonnée à $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle décomposition utilise-t-on pour calculer sa norme $\|A\|_2$? Que vaut cette norme?

c) Que vaut $\|A\|_2$ quand la matrice A est symétrique?

2) Donner la définition du rayon spectral. Cela définit-il une norme? (On justifiera la réponse).

3) On considère la matrice C ci-dessous:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Soit s un réel suffisamment grand (≥ 100). Montrer que les racines de $X2 - sX + 1$ sont très proches de s et $1/s$ (si possible, montrer que la précision de cette approximation est de 2%).
b) Calculer une valeur approchée (à 4% près) du conditionnement, en norme 2, de C.
c) On cherche à résoudre le système $Cx = b$ avec $b = (1, 1)^t$. La précision relative sur b est de l'ordre de 10^{-2}. Quelle est alors la précision sur le résultat x? Feriez-vous confiance au résultat?

Question subsidiaire pour l'intégration

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. On note δ_a l'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$\forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \delta_a(E) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in E \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction δ_a ainsi définie est bien une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.
b) Quelles sont les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
c) Soit f une fonction étagée (combinaison linéaire de fonctions caractéristiques). Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\delta_a(x) = f(a).$$

d) Montrer que le résultat de la question précédente reste vrai pour n'importe quelle fonction mesurable $f : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit une nouvelle mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ par: $\mu_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \delta_{\frac{i}{n}}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_n(x)$

b) On choisit une fonction f continue. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_n(x)$?

Question subsidiaire pour l'Analyse numérique matricielle

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.
a) Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.
b) On suppose toujours que A est diagonale. Calculer $\|A^n\|_1$, $\|A^n\|_2$, $\|A^n\|_F$.
c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\|A^n\|)^{1/n} = \rho(A)$, pour les trois normes considérées.

2) Reprendre les questions précédentes en supposant seulement que A est diagonalisable.

3) Le resultat du 1.c) est-il vrai dans le cas général (c-à-d pour une matrice A quelconque)?