Devoir Maison pour le 7 Décembre

Transformée de Fourier

Ce DM rajoute entre $0,5$ (si la note est 12) et 2 points (si la note est ≤ 18) à la note de Td. Il ne peut compter en négatif. Soignez la redaction, et faites preuve d'imagination: de trop grandes similarités entre devoirs diminuent leur note.
Le barème est le suivant: $\pi^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1}$ pour la première partie, $\frac{3}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$ pour la seconde, et $4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}$ pour les trois dernières.

Soit f une fonction intégrable (c'est-à-dire mesurable avec $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx < +\infty$. On définit alors la transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$ par:

$$\forall \xi \in \mathbb{R},,\quad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\,dx$$

ou encore que $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\cos(\xi x)f(x)\,dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sin(\xi x)f(x)\,dx$

Ces deux formules sont les mêmes et vous pouvez utiliser la plus à votre convenance.

Partie 1: Propriétés de la transformée de Fourier

1) Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que sa transformée de Fourier est bien définie, et que $\hat{f}$ est continue, bornée et que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx$

On suppose maintenant que f vérifie $\int_{\mathbb{R}}|xf(x)|\,dx < +\infty$

2) Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et que $\hat{f}'(\xi) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\xi x}\,dx$

c'est-à-dire que $\hat{f}'(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\sin(\xi x)\,dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\cos(\xi x)\,dx$

3) On suppose que $\int_{\mathbb{R}}|x^n f(x)|\,dx < +\infty$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n.

4) On suppose que $\int_{\mathbb{R}} e^{|x|}|f(x)|\,dx < +\infty$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Partie 2: La transformée de Fourier décompose en fréquence

1) a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Vérifier que $x \to \frac{e^{zx}}{z}$ est bien une primitive de $x \to e^{zx}$.

b) Soit $a, T \in \mathbb{R}$. On pose $g_T(x) = 1/(2T)e^{iax}1_{[-T,T]}$. Calculer $\hat{g_T}$.

c) Calculer, si elle existe, la limite simple de $\hat{g_T}$, quand $T \to \infty$.

Ici, g_T est un signal périodique, de longueur d'onde a. Quand T est assez grand, sa transformée de Fourier se concentre autour d'un point, sa longueur d'onde a.
On pourrait démontrer (cela sera vu en M1), que la transformée de Fourier est quasiment sa propre inverse. Plus précisement, il suffit d'appliquer la même formule (au signe près dans l'exponentielle) pour obtenir f à partir de $\hat{f}$:

$$\text{Pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Cette égalité s'interprète comme ceci: "la transformée de Fourier décompose suivant les fréquences, puisque f est la somme des signaux de longueur d'onde ξ (les $e^{i\xi x}$), avec comme coefficient $\hat{f}(\xi)/\sqrt{2\pi}$".

Partie 3: Quelques exemples

1) a) Calculer, si elle existe, la transformée de Fourier de $g_1(x) = 1_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-x}$.
b) Calculer, si elle existe, la transformée de Fourier de $g_2(x) = e^{-|x|}$.

2) Calculer la transformée de Fourier de $g_3(x) = x1_{[-1,1]}(x)$.

3) a) Calculer, pour tout $a > 0$, la transformée de Fourier de $k_a(x) = \dfrac{1_{[-a,a]}(x)}{2a}$.
b) Dessiner la transformée de Fourier $\hat{k_1}$ (k_a pour $a = 1$).
c) En physique cela s'appelle un paquet d'onde. Pouvez-vous dire pourquoi?

Partie 4: Transformée de Fourier et dérivation
On suppose maintenant que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

1) a) Montrer que f admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Montrer que ces deux limites valent forcément zéro.

2) Montrer que $\hat{\text{f}}\text{'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$. Attention, le membre de gauche est la transformée de Fourier de la dérivée, et non l'inverse, le chapeau est donc au-dessus du prime.
(Indication: On utilisera une IPP sur $[-T,T]$, et on fera tendre T vers $+\infty$.)
Important: En terme de transformée de Fourier, dériver revient donc à multiplier par $i\xi$.

Partie 5: Comportement aux bornes de la transformée de Fourier
Dans cette partie, on va montrer que la propriété P ci-dessous est vraie pour toute fonction intégrable

$$\lim_{\xi \to -\infty} \hat{f}(\xi) = \lim_{\xi \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

. (la démonstration devrait vous rappeler un exercice fait en TD).

1) a) Vérifer cette propriété sur les différents exemples calculés.
b) Soit $T \in \mathbb{R}$, f et une fonction intégrable, On pose $h(x) = f(x+T)$, pour tout x. Calculer la transformée de Fourier de h en fonction de celle de f.
2) En déduire que la propriété P est vraie pour toute fonction en escalier du type:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{[x_{i-1},x_i]}$$

où les λ_i, x_i sont réels, et $-\infty < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < +\infty$.

Pour la question suivante, on admettra le résultat de densité suivant:
Pour toute fonction f intégrable, il existe une suite de fonction en escalier (f_n), telle que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0$$

3) Conclure que la propriété P est vraie pour toute fonction f intégrable.