Université Paris 7 — 2007-2008
Intégration — L3 Maths Appliquées

Supplément à la première feuille d'exercices

Exercice 1: Questions subsidiaires sur les différences symétriques.
La différence symétrique $A\Delta B$ de deux ensembles A et B, est définie par $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

1) Montrer que $A\Delta B$ est l'ensemble des x qui appartiennent à un seul des deux ensembles A et B. En déduire que $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$

2) Montrer que $\limsup A_n \setminus \liminf A_n = \limsup(A_n\Delta A_{n+1})$.

3) Montrer que la différence symétrique est associative. C'est-à-dire que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$). On peut alors noter cet ensemble $A\Delta B\Delta C$. (Indice: On pourra d'abord montrer que cet ensemble contient les élements qui appartiennent à un nombre impair à un seul ou à trois des ensembles A,B,C.)

4) Soient $A_1,\dots,A_n$, une suite de sous-ensembles de Ω.
  a) Caractériser l'ensemble $D_n = A_1\Delta\dots\Delta A_n$.
  b) Caractériser les ensembles $\limsup D_n$ et $\liminf D_n$.

Exercice 2: Normes de fonctions et normes de formes linéaires
On notera comme toujours par $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (On le notera $\mathcal{C}^0$ dans la suite).
On définit sur cet espace les trois normes suivantes:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|,\quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx,\quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

1) Calculer ces trois normes pour les fonctions x^n, $n\in\mathbb{N}$. Et pour la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ si } x<\epsilon \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ si } x\geq\epsilon \end{cases}$$

2) Comparer ces trois normes. Y a-t-il parmi celles-ci deux normes équivalentes?

3) On va étudier certaines formes linéaires sur $\mathcal{C}^0$, c'est-à-dire les applications linéaires de $\mathcal{C}^0$ dans $\mathbb{R}$.
  a) Soit $a\in[0,1]$. On pose $\delta_a(f) = f(a)$. Montrer que cela définit une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0$.
  b) Soit $g\in\mathcal{C}^0$. Montrer que $\Phi_g(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ est aussi une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0$.

Soit A une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0$. Si $\mathcal{C}^0$ est muni d'une norme $\|\cdot\|_\alpha$ (pour $\alpha = 1,2,\infty$) la norme de A associée est définie par:

$$|||A|||_\alpha = \sup_{f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})} \frac{|A(f)|}{\|f\|_\alpha}$$

4) Calculer $|||\delta_a|||_\alpha$ et $|||\Phi_g|||_\alpha$ pour $\alpha = 1,2,\infty$.