Université de Paris 7 **2007-2008**
L3 Math

Intégration

Exercice 1:

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \text{ irrationnel} \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable. (*Essayer de 1) construire pour $\varepsilon > 0$ une division D de [0,1] pour laquelle $S(D) < 2\varepsilon$ où $S(D)$ est la grande somme de Darboux associée à f et D; 2) trouver les discontinuités de f; 3) montrer que f est limite uniforme de fonctions en escalier.*)

Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition. Utiliser la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

Exercice 2:

Pour la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)^2}$$

calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ? A-t'on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad ?$$

Mêmes questions pour la suite $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $g_n(x) = \dfrac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$.

Exercice 3:

1) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties bornées de $\mathbb{R}$. L'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{C}$ est-elle une tribu?

2) Soit E un ensemble. Caractériser l'algèbre de Boole et ensuite la tribu engendrée par les singletons $\{x\}, x \in E$.

Exercice 4:

Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux tribus sur un ensemble E. Montrer que la tribu engendrée par

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{A | A \in \mathcal{A}_1 \text{ ou } \ A \in \mathcal{A}_2\}$$

coïncide avec la tribu engendrée par $\{A_1 \cap A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ou encore par $\{A_1 \cup A_2 | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$.

Exercice 5:

Soit $\mathcal{B}$ une tribu sur un ensemble E, et F une partie de E. On note $\mathcal{B}(F)$ la tribu trace de $\mathcal{B}$ sur F.

1) a) Comparer $\mathcal{B}(F)$ et $\mathcal{B}_F = \{B \in \mathcal{B}, B \subset F\}$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{B}(F) = \mathcal{B}_F$.

2) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties engendrant la tribu $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{C}(F) = \{C \cap F | C \in \mathcal{C}\}$. Montrer que $\mathcal{C}(F)$ engendre $\mathcal{B}(F)$. (*Voir ceci comme un cas particulier du Lemme de transport.*)

Exercice 6:

Montrer que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ des boreliens de $\mathbb{R}$ peut être engendrée par l'une des classes suivantes:

- $\mathcal{C}_1 = \{]a,b[, a,b \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_2 = \{]-\infty,a], a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_3 = \{]-\infty,a[, a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_4 = \{]a,+\infty[, a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_5 = \{[a,+\infty[, a \in \mathbb{Q}\}$
- $\mathcal{C}_6 = \{]-\infty,a], a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

Exercice 7: *Petites tribus*

Soit E un ensemble et A,B,C trois parties de E. Décrire les tribus engendrées respectivement par (A), (A,B) et (A,B,C).

Exercice 8: *Il n'existe pas de tribu dénombrable*

Soit $\mathcal{A}$ une tribu dénombrable sur E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$B_x = \cap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$$

1) a) Montrer que $B_x \in \mathcal{A}$ et que c'est le plus petit ensemble de la tribu contenant x.

b) Montrer qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de B_x distincts. On les notera dorénavant B_n, et on notera $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$.

2) a) Montrer que pout tout $A \in \mathcal{A}$, $A = \cup_{B_n \subset A} B_n$. En déduire que $\mathcal{B}$ engendre la tribu $\mathcal{A}$, et que l'on a

$$\mathcal{A} = \{\cup_{j \in J} B_n | \ J \subset \mathbb{N}\}$$

b) En déduire une contradiction. En conclure l'inexistence d'une tribu dénombrable.

Exercice 9:

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu Borelienne de $\mathbb{R}$. La fonction $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) & \to & (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ x & \mapsto & x-[x] \end{array}$ est-elle mesurable?

Exercice 10:

Soient f et g deux applications mesurables de $(E,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que les ensembles $\{f < g\}$, $\{f \le g\}$, $\{f = g\}$ sont $\mathcal{A}$-mesurables. Même question si f et g sont à valeurs dans $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Exercice 11: *Une fonction non mesurable*

Exercice 12: *"IL est difficile de construire de fonctions non mesurables à partir de fonctions mesurables"*

Cet exercice est fait pour se convaincre que quasimment toute fonction construite comme somme, produit, quotient, derivée, primitvie, limite uniforme ou simple... de fonctions mesurables sera mesurable. Une seule precaution à prendre: Ne pas modifier les tribus de départ et d'arrivée.

On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne (ou de la tribu de Lebesgue). Soient $(X, \mathcal{B})$ un espace muni d'une tribu, g et h deux fonctions mesurable de X dans $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, pour une fonction $h : X \to \mathbb{R}$ et $D \subset X$. On notera $h|_D D \to \mathbb{R}$ la restriction de h à D.

1) Rappeler pourquoi on peut dire quune fonction de X dans $\mathbb{R}$ est mesurable ssi $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est mesurable pour tout a.

2) a) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa tribu borélienne. Montrer que la fonction (f, g) de X dans $\mathbb{R}^2$ est mesurable.

b) En déduire que $f + g$, $f\,g$ sont mesurables.

c) Soit $A = \{x|\ g(x) \neq 0\}$. Montrer que l'ensemble A est mesurable puis que $\frac{f}{g}|_A$ est mesurable quand on munit A de la tribu induite par celle de X.

3) a) Montrer que $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables comme fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ muni de sa tribu borélienne. La tribu borĺienne de $\overline{\mathbb{R}}$ étant engendrée par les $]a, +\infty]$.

b) Montrer que $\liminf f_n$ et $\limsup f_n$ sont mesurables.

c) Montrer que l'ensemble $B = \{x|\ (f_n(x)) \text{ converge}\}$ est mesurable. Puis que $(\lim f_n)|_B$ est mesurable quand B est muni de la tribu induite.

4) a) Parmi les questions précedentes, dire lesquelles restent vraies, et lesquelles deviennent fausses lorsqu'on en remplacant mesurable par continue, l'espace muni d'une tribu $(X, \mathcal{B})$ par un espace métrique, et en considérant $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. Il faudra donner des contre-exemples dans le cas de réponses négatives.

b) La théorie de l'intégrale de Lebesgue permet d'integrer toutes les fonctions mesurables. Quel avantage mis en évidence ici cela procure-t-il par rapport à une théorie de l'intégrale valable pour les fonctions continues ou continues par morceaux?

5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour tout n, on définit:

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\left(g\big(x + \frac{1}{n}\big) - g(x)\right)$$

a) Montrer que les fonctions h_n sont boreliennes.

b) Que vaut $\lim_{n\to+\infty} g_n(x)$?

c) En déduire que g' est borélienne.

Exercice 13: mesurabilité et 'éveloppements dyadiques

A tout réel x de $[0, 1]$ on associe son developpement décimal écrit sous la forme suivante:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x) 10^{-n},$$

ou $s_n(x) \in \{0, 1, \dots, 9\}$ est la n-ième décimale de x. Pour les nombres décimaux, ceux qui admettent un développement de la forme $0, s_1\, s_2 \dots s_{n-1}\, s_n\, 0\,0\,0 \dots$ on choisit celui-ci et non pas l'autre développement possible $0, s_1\, s_2 \dots s_{n-1}\, (s_n - 1)\, 9\,9\,9 \dots$.

1) a) Montrer que toutes les applications s_n sont mesurables.