Université Paris 7 — 2007-2008
Intégration — L3 Maths Appliquées

Troisième feuille d'exercices

Exercice 1: Mesures diffuses
Soit m une mesure positive sur $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un atome pour m si $m(a) > 0$. On dit que m est diffuse si elle ne charge aucun singleton, c'est-à-dire que $m(a) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$. A l'inverse, une mesure purement atomique s'écrit sous la forme $m = \sum_n \alpha_n \delta_{x_n}$.
1) Montrer que la mesure de Lebesgue λ est diffuse.
2) Montrer qu'une mesure finie m possède au plus un nombre dénombrable d'atomes. (on comptera le nombre d'atomes tels que $m(a) \leq 1/n$, pour tout n).
3) Montrer que toute mesure finie m peut s'écrire, de manière unique comme somme d'une mesure diffuse m_d et d'une mesure purement atomique m_a.

Exercice 2: Ouverts et mesure
1) Montrer qu'un ensemble ouvert est forcément de mesure strictement positive. En déduire qu'un ensemble négligeable est forcément d'intérieur vide.
2)a) Construire, pour tout ε un ouvert O_ε de $[0, 1]$ dense et de mesure $\lambda(O_\varepsilon) \leq \varepsilon$.
b) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé d'intérieur vide F tel que $\lambda(F) > 1-\epsilon$. Existe-t-il un fermé d'intérieur vide de mesure de Lebesgue 1?
3)a) Construire sur $\mathbb{R}$ un ensemble ouvert O borné de mesure finie.
b) Même question sur $\mathbb{R}^d$, pour $d \leq 2$. Montrer qu'on peut même choisir l'ensemble O connexe.

Exercice 3: La mesure de Lebesgue est la seule mesure invariante par translation
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et x un réel. On note alors $A + x$ la partie

$$A + x = \{x + y | y \in A\}$$

Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que m$([0, 1]) = 1$ et $m(A+x) = m(A)$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
1) Montrer que m est diffuse ($m(x) = 0$ pour tout x).
2) Montrer que $m([0, 1/q[) = 1/q$ pour tout entier q, puis que $m([0, r[) = r$ pour tout rationnel r.
3) En déduire que m est la mesure de Lebesgue.

Exercice 5. Mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue
On choisit une fonction borélienne f, positive intégrable.
1) Soit (A_n) une suite de boréliens 2 à 2 disjoints, et $A = \cup A_n$. Montrer que l'égalité ci-dessous est vraie (et que les deux membres sont bien définis):

$$\int_A f \, dx = \sum_n \int_{A_n} f \, dx$$

2) On pose $\mu(A) = \displaystyle\int_A f\,dx$. Montrer que l'on définit ainsi une mesure. (montrer qu'elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire que $\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$ pour tout borélien A.
3) Soit g une fonction mesurable bornée. Montrer que

$$\int g\,d\mu = \int f(x)g(x)\,dx$$

Exercice 6.
1) Soit f une fonction mesurable positive et intégrable. Montrer que les sommes de Lebesgue definies ci-dessous

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k2^{-n} m(\{k2^{-n} \le f(x) < (k+1)2^{-n}\})$$

tendent en croissant vers $\int f\,dx$. C'est l'idée originelle qui a amené Lebesgue à construire cette nouvelle intégrale. Copier les sommes de Riemann, mais en découpant l'espace d'arrivée au lieu de l'espace de départ.

Exercice 7. Soit g une fonction croissante
1)a) Rappeler pourquoi g possède une limite à gauche et à droite en tout point.
On notera respectivement $g^-(x)$ et $g^+(x)$ les limites à gauche et à droite en x.
b) Soit $S_g = \{x | g^-(x) < g^+(x)\}$ (noté S car c'est l'ensemble des sauts de g). Montrer que S_g est au plus dénombrable. (On pourra considérer les sauts plus grand que $1/n$, pour tout n)
c) En déduire que toute fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.
d) Montrer qu'une fonction croissante sur une partie borélienne de $\mathbb{R}$ et nulle ailleurs est borélienne.

Exercice 8.
1) Si $(E, \mathcal{A}, m)$ est un espace mesuré et si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, la restriction de m à $\mathcal{B}$ est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$. Est-elle nécessairement bornée (resp. σ-finie) lorsque m est bornée (resp. σ-finie)?
2) Un sous-ensemble N de E est dit **m-négligeable** s'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset B$ et $m(B) = 0$. Notons $\mathbb{N}$ l'ensemble des parties m-négligeables de E. Montrer que la classe $\overline{\mathcal{A}}$ des ensembles de la forme $A \cup N$ avec A dans $\mathcal{A}$ et N dans $\mathbb{N}$ est une tribu sur E qui contient $\mathcal{A}$, et qu'il existe une unique mesure $\overline{m} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ qui prolonge m, définie par

$$\overline{m}(A \cup N) = m(A) \text{ (pour } A \in \mathcal{A} \text{ et } \ N \in \mathbb{N}).$$

L'espace $(E, \overline{\mathcal{A}}, \overline{m})$ s'appelle **complété** de $(E, \mathcal{A}, m)$.

Exercice 9.
Soit f une application mesurable de l'espace mesuré $(E, \mathcal{A}, m)$ dans l'espace mesurable $(F, \mathcal{B})$. Montrer qu'on définit une mesure μ sur $\mathcal{B}$ en posant

$$\mu(B) = m(f^{-1}(B)).$$

Cette mesure s'appelle la **mesure image de m par f** et est notée $f_{\#}m$. Est-ce que $f_{\#}m$ est forcément bornée (resp. σ-finie) lorsque m est bornée (resp. σ-finie)? Est-ce que $f_{\#}m$ est diffuse (i.e. ne charge aucun singleton) lorsque m est diffuse? Si m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q} f(x) = [x]$ calculer $f(m)$ (appelée **mesure de dénombrement** ou de **comptage**).

Exercice 10.
On considère l'intervalle $[0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ.
1) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert O dense dans $[0,1]$ tel que $\lambda(O) < \epsilon$.
2) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé d'intérieur vide F tel que $\lambda(F) > 1 - \epsilon$. Existe-t-il un fermé d'intérieur vide de mesure de Lebesgue 1?

Exercice 10: Construction d'une partie non borélienne) de $\mathbb{R}$
Cette construction repose sur l'axiome du choix. Etant donné une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties non vides et deux à deux disjointes de $\mathbb{R}$, on pourra dire qu'il existe une partie E de $\mathbb{R}$ qui contient un élément et un seul de chaque B_i.
1) Montrer qu'il existe une partie E de $[0,1]$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in E, x - y \in \mathbb{Q}$. (*Regarder les classes d'équivalence sur* $[0,1]$ *pour la relation* $x \sim y$ *ssi* $x - y \in \mathbb{Q}$.)
2) Soit S la réunion des ensembles $S_r = E + r$ où r décrit les rationnels de $[-1,1]$. Montrer que $[0,1] \subset S \subset [-1,2]$ et que les ensembles S_r sont deux à deux disjoints.
3) Montrer que la mesure de Lebesgue λ est invariante par translation ($\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E + r \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(E) = \lambda(E + r)$). En déduire que E n'admet pas de mesure de Lebesgue.

Exercice 12. Soit f_n et g_n deux suites de fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{M}(\mathbb{R}), \lambda)$ (λ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ telles que $f_n = g_n$ μ-pp. A-t-on sup f_n =sup g_n, μ-pp?

Exercice 13.
On note λ la mesure de Lebesgue.
1) Quelles sont les fonctions continues sur $[0,1]$ nulles λ-pp. Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace continues par boréliennes?
2) Peut-on comparer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues λ-pp et l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λ-pp égales à une fonction continue définie partout?

Exercice 13: Lemme de Borel-Cantelli
Pour une suite d'ensembles (A_n), on note $\overline{\lim} A_n = \cap_{n \in \mathbb{N}} \cup_{p \leq n} A_p$. Si m est une mesure et (A_n) une suite d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) < \infty$, on a

$$m(\overline{\lim} A_n) = 0.$$

Exercice 15. l'ensemble de Cantor est négligeable
Soit (a_n) une suite décroissante convergeant vers $\alpha \geq 0$, telle que $a_0 \in]0,1[$.
On définit une suite de fermés $C_n \subset [0,1]$ comme suit :
C_0 est obtenu en enlevant au milieu de $[0,1]$ un intervalle ouvert de longueur $1 - a_0$
C_n est obtenu en enlevant au milieu de chaque segment composant C_{n-1} un intervalle ouvert de longueur $2^{-n}(a_{n-1} - a_n)$.

1) Faire un dessin du segment $[0,1]$ en y retprésentant C_1, C_2, C_3.
2) Montrer que $C =_{\text{def}} \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est mesurable. Quelle est sa mesure?
3) Montrer que C est compact, totalement discontinu (i.e. les composantes connexes de C sont des points) et sans point isolé .
4) On pose $a_n = (2/3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $C = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k 3^{-k} | a_k \in \{0,2\}\}$.
5) En déduire le cardinal de C.

Exercice 16.
Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et f une application mesurable finie μ-presque partout. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

a) f est μ-intégrable.

b) $\displaystyle\int_{\{|f|>n\}} |f| d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mu(\{n < |f| \leq n+1\}) < +\infty.$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \mu(\{|f| > n\}) < +\infty.$

Exercice 17.
Les fonctions suivantes sont elles Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}$?

a) $x^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}-\mathbb{Q})\cap[0,1]}(x)$

b) $\begin{array}{ccc} x, (x \neq 0) & \mapsto & 1/\sqrt{x}\mathbf{1}_{]0,1]}(x) \\ 0 & \mapsto & 100 \end{array}$

c) $\begin{array}{ccc} x, (x \neq 0) & \mapsto & \sin(1/x) \\ 0 & \mapsto & 100 \end{array}$

Exercice 18.
1) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a: $\displaystyle\int_{[0,n]} (1 - \frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} d\lambda(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} x^{\alpha-1} d\lambda(x).$
2) Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n^2]} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-ax} d\lambda(x)$ dans les cas $a > 1$ et $a \leq 1$.

Exercice 19. Etudier:
1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx.$
2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$

Exercice 20.
On se place sur l'espace $E = [-1,1]$ muni de sa tribu Borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ. On considère pour $n \geq 1$ la suite de fonctions définies sur E par

$$f_n(x) = n.\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}]}(x) - n.\mathbf{1}_{[-\frac{1}{n},0[}(x).$$

1) Montrer que (f_n) converge λ-pp vers une fonction f.

2)a) A-t-on: i) $\displaystyle\int_E f_n d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\lambda$? ii) $\displaystyle\int_E |f_n| d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E |f| d\lambda$?

iii) $\displaystyle\int_E |f_n - f| d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$? iv) $\forall A \in \mathcal{B}, \displaystyle\int_A f_n d\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_A f d\lambda$?

b) Peut-on appliquer le théorème de Lebesgue (de convergence dominée)?