Quatrième feuille d'exercices

Exercice 1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x dx$, pour $n\in\mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$.

Exercice 3. Soit $f : \begin{array}{lcl}]0,1[\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & 1_{[0,x]}(t) \end{array}$.

1) Montrer que pour tout t, $f_t : x\mapsto f(x,t)$ est dérivable en $x\neq t$.
2) Peut-on appliquer le théorème de dérivation des intégrales à un paramètre pour calculer la dérivée de $g(x)=\int_0^1 f(t,x)\,dt$?

Exercice 4: La fonction Gamma
1) On pose $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que la fonction Γ est bien définie, continue, puis de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et calculer ses dérivées.
2) A l'aide d'une IPP, montrer que $\Gamma(s)=(s-1)\Gamma(s-1)$, pour tout $s>1$.
3) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pout tout $n\in\mathbb{N}^*$
4) Soit $a\in]0,+\infty[$
a) Calculer $A=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-at}dt$ à l'aide de la fonction Γ.
b) Exprimer $A_n=\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$ en fonction de Γ (utiliser un bon changement de variable).
c) (Dur, dur!) Montrer que la fonction $t\mapsto e^{-t^2}\cos(at)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(at)dt$ à partir de $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.
(On utilisera le développement en série entière de cos).

Exercice 5: Somme d'une gaussienne La fonction gaussienne e^{-x^2} est une fonction très souvent utilisée en théorie des probabilités. On cherche ici à calculer son intégrale $I=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx$. Pour cela, on introduit $J=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.
1) Montrer, en utilisant Fubini, que $J=I^2$.
2) Utiliser le changement de coordonnées polaires dans J et montrer que $J=2\pi\displaystyle\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr$.
3) En déduire la valeur de J, puis celle de I.
4) Calculer maintenant la valeur de l'intégrale de la Gaussienne de dimension d:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2}\,dx,$$

où $x\in\mathbb{R}^d$, $|x|=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{1/2}$ et la mesure utilisée est la mesure de Lebesgue de dimension d.

Exercice 6: Transformée de Laplace
Soit f une fonction réelle (ou complexe) définie sur $\mathbb{R}^+$. On suppose qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ et une constante $C\in\mathbb{R}^+$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |f(x)|\le C(1+|x|)^n$.

On définit alors la fonction $\mathcal{F}(f)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ par la formule: $\mathcal{F}(f)(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-ax}\,dx$.

1) Montrer que f est bien définie si $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à a, et que $(\mathcal{F}(f))'(a) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)e^{-ax}\,dx$.

3) Montrer que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer toutes ses dérivées.

4) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et que f' vérifie aussi la condition $|f'(x)| \leq C'(1+|x|)^{n'}$ pour une constante C' et un entier n'. Montrer que

$$\mathcal{F}(f') = a\mathcal{F}(f) - f(0)$$

Ce que l'on peut traduire par "Avec la transformation de Laplace, dériver reviens à multiplier par a, à une constante $-f(0)$ près."

5) Calculons quelques transformées de Laplace:

a) Calculer $\mathcal{F}(x^n)$, pour tout n.

b) Calculer $\mathcal{F}(e^{-cx})$, quand c est strictement positif.

c) Calculer $\mathcal{F}(e^{i\omega x}$, pour $\omega \in \mathbb{R}$.

6) On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire $f'' = -\omega f$, où $\omega > 0$.

a) On suppose que les hypothèses qui permettent de calculer les transformées de Laplace de f, f', f'' sont vérifiées. Montrer que la transformée de Laplace de f vérifie:

$$(a^2 + c)\mathcal{F}(f) = af(0) + f'(0)$$

b) On admettra ici que la transformation de Laplace est injective. Utiliser les calculs de la question précedente pour montrer que

$$f(x) = f(0)\cos(\omega x) + f'(0)\sin(\omega x)$$

Cette méthode est utilisée pour résoudre des équations différentielles ordinaires. C'est parfois plus facile car les dérivées sont remplacées par des multiplications.

7) Utiliser cette technique pour résoudre l'équation $f' = cf$, $c > 0$.

Exercice 7. On pose pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

1) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $F'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$, et en déduire l'expression de $F(x)$.

3) On pose $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

a) Montrer à l'aide d'une minoration de $|a_n|$, que la série a_n n'est pas absolument convergente.

b) En déduire que la fonction $\dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc que F n'est pas définie en 0.

4) Montrer que la série a_n est alternée.

a) En déduire la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 8. (Dur) Calcul du volume de la boule euclidienne unité

Soit $n \geq 1$. On note V_n le volume de la boule euclidienne unité B_n définie par

$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

1) Calculer V_1 et V_2.

2) Soit $n \geq 3$. En remarquant que

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1) \iff (x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 \text{ et } x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2),$$

et en utilisant Fubini, montrer que $V_n = \int_{B_2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{(n-2)/2} V_{n-2}\, dx_1 dx_2$

a) Utiliser les coordonnées polaires pour établir que $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$.

3) En déduire que les suites V_n et $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ vérifient la meme relation de récurrence. (On rappelle que $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$).

4) Conclure.

Exercice 9.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{x^2+y^2}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit intégrable. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^2+y^2}$ est intégrable.

3) Pour $y \in \mathbb{R}^*$, posons $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+y^2} dx$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est intégrable et que $\int_{\mathbb{R}} g(y)dy = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{|x|} dx$.

Exercice 10.

1) Montrer que la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{-y} cos(xy)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-y} cos(xy) dy = \frac{1}{x^2+1}$.

3) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{\sin y}{y} dy$. (*Indication:* Il y a une primitive cachée)

Exercice 11: Intégration par parties On munit $[a,b]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On pose $F(x) = \int_a^x f(x)\, dx$ et $G(x) = \int_a^x g(x)\, dx$.

1) Soit $\Delta_1 = \{(x,y) | a \le y < x \le b\}$, et $\Delta_2 = \{(x,y) | a \le x \le y \le b\}$. Dessiner ces deux ensembles.

2) Calculer $\int_{[a,b]\times[a,b]} f(x)g(y)\, dxdy$

3) Montrer que $\int_{\Delta_1} f(x)g(y)\, dxdy = \int_a^b g(y)(F(y) - F(a))\, dy$.

4) Montrer que $\int_{\Delta_2} f(x)g(y)\, dxdy = \int_a^b f(x)(G(x) - G(a))\, dy$.

5) En déduire la formule "d'integration par parties":

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a,b]} F(x)g(x)d\lambda(x) + \int_{[a,b]} G(x)f(x)d\lambda(x)$$

6) (Très dur!) Que devient cette formule si l'on remplace $[a,b]$ par $[1,+\infty[$, la mesure $f(x)\,dx$ par $\sum_{n=1}^{N} a_n \delta_n$ et $g(y)\,dy$ par $\sum_{n=1}^{N} b_n \delta_n$

(*Réponse:* La formule de la transforamtion d'Abel $A_N B_N = \sum_{n=1}^{N} (A_n b_n + B_n a_n)$ avec $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ et $B_n = \sum_{i=1}^{n} b_n$)

Exercice 12: Quand Fubini ne marche pas

Soit $E = [0,1] \times [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a) Remarquer que $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{-x}{x^2+y^2}) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, et l'utiliser pour calculer. $\displaystyle\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\, dx \right) dy.$

b) Montrer que $f(y,x) = -f(x,y)$. En déduire que $\displaystyle\int_E f(x,y)\, dxdy = 0$

c) Où est le problème?

2) On munit maintenant un des intervalles $[0,1]$ de la mesure μ de comptage. Calculer

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} h(x,y) dx \right) d\mu(y), \text{ et } \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} h(x,y) d\mu(y) \right) dx$$

où $h(x,y) = 1$ si $x = y$ et $h(x,y) = 0$ sinon.

3) Montrer que f, h sont mesurables, et expliquer pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique pas.

Exercice 13: Le changement de variable dans le cas linéaire

On munit $\mathbb{R}^2$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit A une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. La mesure μ image par l'application A de la mesure de Lebesgue est définie par:

$$\forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ \mu(D) = \lambda(A(D))$$

1) a) Montrer que cela définit bien une mesure.

b) Montrer que cette mesure est invariante par translation.

c) En utilisant que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure invariante par translation (à une constante près), montrer qu'il existe une constante dépendante de A, que l'on notera c_A, telle que

$$\forall D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\ \mu(D) = c_A \lambda(D)$$

2) On introduit maintenant trois classes d'application linéaires.

- Les dilatations: de la forme $(x_1, x_2) \to (x_1, \lambda x_2)$, ou $(x_1, x_2) \to (\lambda x_1, x_2)$.
- Les applications de cisaillement: $(x_1, x_2) \to (x_1, x_1 + x_2)$, avec la même chose en inversant les rôles de x_1 et x_2.
- Les permutations de coordonnées: en dimension deux, il n'y a que l'identité et $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$.

a) Montrer que toute application linéaire peut s'écrire comme composée de dilatations, de cisaillements et de permutations des coordonnées. (Au besoin, demandez à votre chargé de TD d'Analyse Numérique Matricielle qui se ferra une joie de vous expliquer la décomposition LU.)

b) Dessiner l'image du carré unité $C = [0,1] \times [0,1]$ par une application de chaque classe.

c) En déduire la constante c_A quand A est d'une des trois formes ci-dessus. Vérifiez que l'on a $c_A = |\det(A)|$ dans chacun des cas.

3) a) Conclure que dans le cas général, on a aussi. $c_A = |\det(A)|$.

b) En déduire la formule de changement de variable

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(Ax) |\det(A)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx.$$

(On commencera par le faire pour des fonctions caractéristiques d'ensemble, puis ...)

4) Reprendre ces étapes pour démontrer ce même résultat sur $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 3$.