Université de Paris 7 **2007-2008**
L3 Math

Intégration

Exercice I

(Examen 9/87) Soit $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$; calculer l'intégrale

$$\int\int_A y\,dx\,dy \quad .$$

Exercice II

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Calculer les intégrales doubles

$$L = \int\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2} dx\,dy \ , \ M(a,b) = \int\int_\Omega a^x b^y dx\,dy \ ,$$

où a et b sont deux réels positifs non nuls.

Exercice III

On appelle T le triangle de sommets $A = (-2,0), B = (1, -\sqrt{3}), C = (1, \sqrt{3})$. Calculer

$$\int\int_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy \quad .$$

Exercice IV

Soit K un compact de $\mathbf{R}^2$, d'aire A , non nulle . Le *centre de gravité* de K — supposé représenter une plaque homogène — est le point G de coordonnées

$$x_G = \frac{1}{A}\int\int x\,dxdy \ , \ y_G = \frac{1}{A}\int\int y\,dxdy \ .$$

On considère l'ensemble K des $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ tels que

$$2 \leq \rho \leq 3 \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi/4 \ .$$

Déterminer le centre de gravité de K par les trois méthodes suivantes:
- en intégrant d'abord par rapport à x,
- en intégrant d'abord par rapport à y,
- en passant en coordonnées polaires.

Exercice V

On considère le tétraèdre $T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 \ , \ x + y + z \leq 1\}$.
1) Montrer que T est compact.
2) Calculer le volume V de T.
3) Déterminer le centre de gravité G de T (les coordonnées de G sont

$$x_G = V^{-1}\int\int\int_T x\,dx\,dy\,dz \ , \ y_G = V^{-1}\int\int\int_T y\,dx\,dy\,dz \ , \ z_G = V^{-1}\int\int\int_T z\,dx\,dy\,dz \ .)$$

Exercice VI

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante (donc borélienne). On pose $f(0) = \alpha$.

1) Montrer que f a une limite à droite en 0. On note β cette limite.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto f(x^n)$. Montrer que les fonctions f_n sont boréliennes. Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

3) Dans les deux cas

a) $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_a)$ pour $a \in]0,1[$ où δ_x désigne la mesure de Dirac en x;

b) $\mu = \lambda$ (mesure de Lebesgue);

démontrer que la suite $\int_{[0,1]} f_n d\mu$ converge et calculer sa limite.

Exercice VII

1) Calculer $\int_0^1 x^n \ln x dx$, pour $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

Exercice VIII

1) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy$.

2) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice IX

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$.

Exercice X

Soit $E = [0,1] \times [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. En remarquant que $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-x}{x^2+y^2}) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, calculer $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(x)) d\lambda(y)$, puis $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f(x,y) d\lambda(y)) d\lambda(x)$.

2) Même question avec $g : E \to \mathbb{R}$ définie par: $g(x,y) = \begin{cases} (x-\frac{1}{2})^{-3} \text{ si } 0 < y < |x-\frac{1}{2}| \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

3) On munit maintenant un des intervalles $[0,1]$ de la mesure μ de comptage. Calculer $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} h d\lambda) d\mu$, et $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} h d\mu) d\lambda$ où $h(x,y) = 1$ si $x = y$ et $h(x,y) = 0$ sinon.

4) Montrer que f, g, h sont mesurables, et expliquer pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique pas.

Exercice XI intégration par parties

Soit μ_1 et μ_2 des mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de densité f et g par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $F(x) = \mu_1(]-\infty, x])$, $G(x) = \mu_2(]-\infty, x])$.

Soit $\Delta_1 = \{(x,y) | a \leq y < x \leq b\}$, et $\Delta_2 = \{(x,y) | a \leq x \leq y \leq b\}$. En considérant de deux manières différentes la quantité $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, établir la formule "d'integration par parties":

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a,b]} F(x)g(x)d\lambda(x) + \int_{[a,b]} G(x)f(x)d\lambda(x)$$

Exercice XII

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1) Montrer que l'application $g : E \times \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $(x,t) \mapsto g(x,t) = (f(x), t)$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable. En déduire que le sous-ensemble suivant de $E \times \mathbb{R}$, appelé **graphe** de f, est mesurable:

$$G(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}; f(x) = t\}.$$

2) Soit $(x,t) \in E \times \mathbb{R}$. Vérifier que $\mathbf{1}_{G(f)}(x,t) = \mathbf{1}_{\{f(x)\}}(t)$ et en déduire la valeur de $\mu \otimes \lambda(G(f))$.

3) En réciproque à la question (1), montrer que si f est positive et le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par $Epi(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}; 0 \leq t < f(x)\}$, appelé **épigraphe** de f, est dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors f est $\mathcal{A}$-mesurable. (*Indication: Montrer que* $Epi(f)_t = \{x \in E; (x,t) \in Epi(f)\}$ *est mesurable.*)

Exercice XIII

1) Montrer que la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{-y} cos(xy)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y} cos(xy) dy = \frac{1}{x^2+1}$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{\sin y}{y} dy$.

Exercice XIV

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{x^2+y^2}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit intégrable. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^2+y^2}$ est intégrable.

3) Pour $y \in \mathbb{R}^*$, posons $g(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+y^2} dx$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est intégrable et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(y) dy = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{|x|} dx$.