Université Paris Diderot
L3 Maths Appliquées

Année 2007/08
Intégration

Corrigé du partiel du 8 décembre

1) **Question de cours 1.**

a) Voici l'énoncé du théorème de convergence dominée : *Soit* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré* $(X, \mathcal{B}, \mu)$. *On suppose que*

– *la suite* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ *converge* μ*-presque partout vers une fonction* f,

– *il existe une fonction* μ*-intégrable* g *telle que* $|f_n| \leqslant g$ μ*-presque partout.*

Alors la fonction f *est* μ*-intégrable et on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \, .$$

b) Soit $(f_n)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par

$$f_n(x) = n(1 - xn) \quad \text{pour}\, x \in [0, 1/n] \, ; \quad f_n(x) = 0 \quad \text{pour}\, x \in]1/n, 1] \, .$$

En dessinant le graphe de f_n on voit aussitôt que

$$\int_0^1 f_n(x) \, dx = 1/2$$

pour tout n et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = 1/2 \, .$$

Pour $x > 0$, on a $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang, ce qui montre que la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ converge presque partout vers la fonction nulle. Il vient donc

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \, dx = 0 \, .$$

On ne peut pas appliquer à la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ le théorème de convergence dominée, sinon on arriverait à la conclusion que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \, dx \, .$$

Une étude plus poussée montrerait que la fonction $g(x) = \sup_{n\geqslant 2} |f_n(x)|$, qui se comporte comme $1/x$ au voisinage de 0, n'est pas intégrable. L'hypothèse de domination de la suite $(f_n)_{n\geqslant 2}$ par une fonction intégrable est donc en défaut.

2) **Question de cours 2.** On se propose d'établir que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est invariante par translation.

Soit $p \in \mathbb{R}$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on pose $A + p = \{x + p \, : \, x \in A\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = [-n, n]$ et on note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des boréliens A de I_n tels que $\lambda(A + p) = \lambda(A)$.

a) Notons d'abord que

($\star$) *tout intervalle* I *inclus dans* I_n *appartient à* $\mathcal{C}_n$.

En effet, si $I = (a, b)$, on a $I + p = (a + p, b + p)$ et donc $\lambda(I + p) = (b + p) - (a + p) = \lambda(I)$.

$\mathcal{C}_n$ est une classe monotone sur I_n si et seulement si :

1. $I_n \in \mathcal{C}_n$.
2. Pour tous A et B éléments de $\mathcal{C}_n$ tels que $B \subset A$, on a $A \setminus B \in \mathcal{C}_n$.
3. Pour toute suite croissante $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_n$, on a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{C}_n$.

La propriété (1) résulte de ($\star$). Pour établir (2), on note que $(A \setminus B) + p = (A + p) \setminus (B + p)$; puisque $\lambda(I_n) < +\infty$, il en résulte que

$$\lambda\left((A \setminus B) + p\right) = \lambda(A + p) - \lambda(B + p) = \lambda(A) - \lambda(B) = \lambda(A \setminus B)$$

et donc $A \setminus B \in \mathcal{C}_n$. Pour établir (3), on part de

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) + p = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k + p)\,,$$

ce qui donne

$$\lambda\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) + p\right) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(A_k + p) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(A_k) = \lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right),$$

et donc $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{C}_n$.

b) Comme l'ensemble des intervalles inclus dans I_n est stable par intersections finies, le théorème de la classe monotone nous assure que $\mathcal{C}_n$ inclut la tribu engendrée par les intervalles, c'est à dire la tribu borélienne. On a donc $\lambda(A+p) = \lambda(A)$ pour tout borélien $A \subset I_n$.

c) Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. En posant $A_n = A \cap I_n$ pour tout $n \geqslant 1$, on obtient une suite croissante dont la réunion est A. En raisonnant comme dans la question a), propriété (3), et appliquant la question b) à $A_n \subset I_n$, on conclut que $\lambda(A+p) = \lambda(A)$.

3) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $I =]0, +\infty[$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{e}^{-a_j x}\,, \quad \forall x \in I\,.$$

a) La fonction f_n est intégrable sur I, car c'est une somme finie de fonctions intégrables. On a en effet

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a_j x} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \mathrm{e}^{-a_j x} dx = \lim_{R\to+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-a_j R}}{a_j} = \frac{1}{a_j} < +\infty.$$

b) Soit $x \in I$. La suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est croissante, car $f_n(x) - f_{n-1}(x) = \mathrm{e}^{-a_n x} > 0$. Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ admet une limite $f(x)$ dans $[0, +\infty]$. Puisque chaque fonction f_n est borélienne, la fonction f, limite simple d'une suite de fonctions boréliennes, est elle-même borélienne, d'après le cours.

c) D'après le théorème de Beppo Levi, on a

$$(\star) \qquad \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j}\,.$$

Il y a donc équivalence entre l'intégrabilité de f sur I et la convergence de la série $\sum \frac{1}{a_n}$.

4) Soit g une fonction borélienne sur $I = [0, 1]$, à valeurs dans $[0, +\infty[$. On pose

$$f(t) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-tg(x)}\, dx\,, \quad \forall t \geqslant 0\,.$$

a) Puisque g est à valeurs positives, on a

$$|\mathrm{e}^{-tg(x)}| \leqslant 1 \quad \forall x \in I\,, \forall t \geqslant 0\,.$$

Puisque $\int_I 1\, d\lambda = \lambda(I) = 1$, la fonction 1 est intégrable. Par ailleurs la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-tg(x)}$ est continue quel que soit $x \in I$. En appliquant le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, on conclut que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$. On a

$$f(0) = \int_0^1 dx = 1\,.$$

b) Supposons g intégrable. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{-tg(x)} = -g(x)\mathrm{e}^{-tg(x)} \quad \forall x \in I\,, \forall t \geqslant 0$$

et donc

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{-tg(x)}\right| \leqslant g(x) \quad \forall x \in I\,, \forall t \geqslant 0\,.$$

En appliquant le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres, on conclut que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

c) Posons

$$u_n(x) = n\left(1 - \mathrm{e}^{-g(x)/n}\right) \quad \forall x \in I\,.$$

Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x}$ a comme dérivée -1 en 0, on a

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) \quad \forall x \in I\,.$$

Si $f'_d(0) = -\alpha$, on a

$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} n\left(f(0) - f(\frac{1}{n})\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx\,.$$

En appliquant le lemme de Fatou à la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$, on obtient

$$\int_0^1 \liminf u_n(x)\,dx \leqslant \liminf \int_0^1 u_n(x)\,dx\,,$$

ce qui donne encore

$$\int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \liminf \int_0^1 u_n(x)\,dx = \alpha\,,$$

et donc l'intégrabilité de g.

5) On définit $f : [\pi, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,, \quad \forall x \geqslant \pi\,.$$

a) La fonction f est continue, donc borélienne. Par définition, f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[\pi, +\infty[$ si

$$\int_\pi^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty\,.$$

Or on a

$$\int_\pi^{+\infty} |f(x)|\,dx = \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(x)|\,dx \geqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente, on conclut que la fonction f n'est pas intégrable.

b) En intégrant par parties, on obtient

$$\int_\pi^r f(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{\cos r}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2}\int_\pi^r \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx \quad \forall r > \pi\,.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^{3/2}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$, en effet

$$\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^{3/2}}\right| dx \leqslant \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_\pi^r \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{3/2}}\,dx\,.$$

Par ailleurs il est évident que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\cos r}{\sqrt{r}} = 0\,.$$

On peut conclure que $\displaystyle\int_\pi^r f(x)\,dx$ admet une limite finie quand $r \to +\infty$, et donc que f admet une intégrale généralisée sur $[\pi, +\infty[$.