

Équations cinétiques - Notes de cours - Partie 1.

INTRODUCTION À LA DESCRIPTION STATISTIQUE DE MODÈLES PHYSIQUES.

Maxime Hauray

2012-2013

1 Niveau microscopique : systèmes de particules en interaction.

1.1 Description

Quand on parle de niveau microscopique en physique c'est qu'on entend décrire un système physique de taille standard (1 mole), en revenant aux nombreux composant élémentaires : atomes, molécules, voire électrons qui le composent.... On s'arrête donc à l'échelle la plus petite que l'on peut considérer en mécanique classique, en dessous, il faudra se tourner vers la physique quantique. Par analogie on parle aussi de description microscopique pour des systèmes bien plus grands, par exemple une galaxie, si on la regarde comme composée de nombreux (10^6 à 10^9) constituants élémentaires : les étoiles (à cette échelle, on peut négliger tous le reste). Dans une galaxie, une étoile est un objet de l'échelle "microscopique" correspondante.

Donc ce qui est le plus important quand on parle de niveau (ou mieux description au niveau) microscopique en physique statistique, c'est que le système considéré soit composé d'un grand nombre de particules, qui interagissent entre elles et aussi éventuellement avec des forces extérieurs, via des forces variées. C'est le cas par exemple d' un gaz, un liquide, un plasma (gaz très chaud et donc ionisé), qui contiennent en général de 10^{10} à 10^{26} particules par m^3 , et aussi d'une galaxie.

Des simplifications mathématiques. Par un soucis de simplification mathématique, on supposera par la suite que les particules étudiées sont identiques. Dans les cas physiquement intéressants, on a plutôt souvent un nombre fini de types de particules. C'est le cas dans un gaz , l'atmosphère est par exemple un mélange de différentes molécules : azote, di-oxygène, CO_2 ,... mais aussi dans un plasma qui contient plusieurs espèces d' ions et des électrons. Parfois il y a beaucoup encore plus de variété : dans une galaxie les étoiles sont de masses très variables. Mais si cela est très important pour un physicien, il est important de noter que cette simplification ne change pas grand chose du point de vue mathématique. Dans notre cadre, la difficulté et l'intérêt sont ailleurs, et l'hypothèse des particules toutes identiques est tout à fait acceptable.

Pour la même raison, même si les interactions et les propriétés des particules font apparaître en général différentes grandeurs (masse, charge élémentaire, constantes physiques variées), très importantes pour connaître les propriétés qualitatives de ces systèmes, elles le sont souvent beaucoup moins pour connaître les propriétés qualitatives et mathématiques. C'est pour cela que

dans la suite, la plupart des constantes physiques seront prises égales à 1. On ne gardera que celles qu'il sera intéressant de faire varier.

Le système étudié. Donc généralement, nous étudierons N particules de positions (X_1, \dots, X_N) dans \mathbb{R}^d et de vitesse (V_1, \dots, V_N) dans \mathbb{R}^d également avec $d = 1, 2, 3$, qui interagissent via un potentiel d'interaction ϕ , et subissent éventuellement un potentiel extérieur ϕ_{ext} . La dynamique des particules suit le principe fondamental de la dynamique, ou seconde loi de Newton. Cela donne un "grand" système d'équations différentielles ordinaires (EDO dans la suite)

$$\forall i \leq N, \quad \dot{X}_i = V_i, \quad \dot{V}_i = -\frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla K(X_i - X_j) - \nabla \phi_{ext}(X_i). \quad (1.1)$$

eq:Newton

La seconde équation est la traduction du fait que l'accélération de la particule i est la somme des forces exercées par les autres particules $j \neq i$. Il n'y a pas de force d'auto-interaction, donc on somme sur tous les $j \neq i$. Attention, dans cette somme, i est fixé.

Pourquoi une constante $1/N$? La constante $1/N$ devant la somme est importante. Elle correspond à dire que les N particules ont une masse (ou une charge, ou ...) égale à $1/N$, ce qui veut dire que la masse totale est égale à 1 (bien sûr ce 1 n'est qu'une simplification mathématique, on pourrait le remplacer par n'importe quelle constante). Cela n'a pas trop d'importance si l'on étudie un nombre fixé de particules, mais cela deviendra très important lorsqu'on voudra plus tard faire varier le nombre de particules.

Dans quel domaine ? Le système d'équation (1.1) a été écrit pour des particules dans l'espace entier \mathbb{R}^d . C'est un cas très important, mais on s'intéresse aussi souvent à des particules confinés, par des potentiels extérieurs mais aussi des parois ou des géométries particulières. On peut les classer en général en trois classes :

◇ Espace entier : $X_i \in \mathbb{R}^d$, et $V_i \in \mathbb{R}^d$.

Il faut dans ce cas toujours faire attention aux problèmes de compacité car l'espace des positions est infiniment grand.

◇ Domaine borné régulier : $X_i \in \Omega$, un domaine de \mathbb{R}^d avec bord $\partial\Omega$ régulier, et $V_i \in \mathbb{R}^d$.

Dans ce cas, le problème de compacité en position disparaît, mais il est toujours vrai en vitesse. Par contre, la prise en compte des réflexions aux bords introduit de nombreuses difficultés supplémentaires. On ne traitera pas ce cas dans ce cours. On peut juste mentionner que ce genre de situation peut-être approchée en choisissant un potentiel extérieur ϕ_{ext} égal à 0 dans Ω et très grand en dehors.

◇ Géométrie périodique : $X_i \in \mathbb{T}^d$, le tore de dimension d , et $V_i \in \mathbb{R}^d$.

Ce cas est le plus simple car on n'a pas de problèmes de bords, ni de problèmes de compacité en position. Il ne reste plus qu'à faire attention à la compacité en vitesse.

Dans ce cours, on se placera en général dans le cas de l'espace entier, et parfois dans le cas périodique pour se débarrasser des problèmes de compacité en espace. Physiquement, les trois cas sont intéressants. en astronomie on utilise souvent l'espace entier, les gazs peuvent être confiné dans une pièces, et on peut confiner des plasmas grâce à des champs magétiques intenses et dans ce cas l'espace intéressant est un tore.

Attention : il faut bien noter que dans tous les cas, les vitesses prennent leur valeur dans \mathbb{R}^d . en effet, elles n'ont aucune raison d'être contraintes par la géométrie de l'espace des positions.

Quelle force d'interaction ? Les forces d'interaction utilisées sont diverses. Les plus utilisées sont quand même :

- ◇ La force *électrostatique ou Coulombienne*. En dimension 3, le potentiel d'interaction correspondant est donné, entre deux particules de même charge et en oubliant les constantes physiques, par

$$\phi_c(x) := \frac{1}{|x|}, \quad F_c(x) = -\nabla\phi_c(x) = \frac{x}{|x|^3}.$$

Cette force est répulsive : il faut beaucoup d'énergie pour rapprocher deux particules de même charge. Mentionnons enfin qu'en dimension 2, le potentiel $\phi_c(x) = -\ln(|x|)$.

- ◇ La force de *gravitation*. En dimension 3 sa forme est

$$\phi_g(x) := -\frac{1}{|x|}, \quad F_g(x) = -\nabla\phi_g(x) = -\frac{x}{|x|^3}.$$

Celle-ci est attractive. Et en dimension 2, $\phi_g(x) = \ln(|x|)$. Le cas attractif pose en général plus de difficulté que le cas répulsif, comme on le verra par la suite.

- ◇ La force de Van der Waals, qui modélise l'interaction entre molécules (donc neutres). Le potentiel associé décroît très rapidement en $|x|$ mais est aussi très singulier à l'origine

$$\phi_{vdw}(x) := -\frac{1}{|x|^6}.$$

On le corrige quand c'est utile en ajoutant un terme repulsif à très courte distance pour prendre en compte l'impossibilité pour deux molécules de se chevaucher (principe d'exclusion de Pauli). Et cela devient alors le potentiel de Lennard-Jones

$$\phi_{LJ}(x) := \frac{1}{|x|^{12}} - \frac{1}{|x|^6}.$$

- ◇ *Des potentiels réguliers*. Pour obtenir des résultats mathématiques rigoureux, on aura malheureusement souvent besoin de faire des hypothèses de régularité sur le potentiel d'interaction. Typiquement, on aura besoin que le potentiel soit de classe \mathcal{C}^2 . Or comme on peut le voir tous les potentiels ci-dessus présentent une singularité plus ou moins forte en $x = 0$, et n'ont jamais la régularité \mathcal{C}^2 en l'origine. On peut quand même les approcher en les régularisant, par exemple en remplaçant $|x|$ par $\sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2}$ avec $\varepsilon > 0$ petit dans la définition des potentiels. Cela donne par exemple pour le potentiel gravitationnel

$$\phi_g^\varepsilon(x) = -\frac{1}{\sqrt{|x|^2 + \varepsilon^2}}.$$

1.2 Conservation et résolution.

Deux quantités conservées : la quantité de mouvement et énergie totale. La quantité de mouvement totale, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système sont classiquement définies par

$$\begin{aligned} P_{tot}(t) &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i(t), & E_{cin}(t) &:= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{V_i(t)^2}{2}, \\ E_{pot}(t) &:= \frac{1}{2N^2} \sum_i \sum_{j \neq i} K(X_i - X_j) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_{ext}(X_i). \end{aligned} \tag{1.2} \quad \boxed{\text{eq:Mom_Ene}}$$

prop:cons

Proposition 1. *Si le potentiel d'interaction est pair ($\phi(x) = \phi(-x)$ pour tout x), ce qui est toujours le cas, alors le moment cinétique et l'énergie totale sont conservées au cours du temps. On dit aussi que se sont des intégrales premières du mouvement.*

Cette propriété va rester formelle tant que l'on ne saura pas que les solutions de (I.1) ^{eq:Newton} sont bien définies. Mais il est utile de la montrer, même formellement le plus tôt possible.

Preuve de la proposition 1. ^{prop:cons} On laisse la preuve de la conservation de la quantité de mouvement totale en exercice. On montre celle de l'énergie totale. On suppose donc qu'on a une solution bien définie du système d'EDO et on dérive son énergie cinétique totale par rapport au temps. On obtient

$$\frac{d}{dt} E_{cin}(t) = \frac{1}{N} \sum_i V_i \cdot \dot{V}_i = -\frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_i \cdot \nabla \phi(X_i - X_j) - \frac{1}{N} \sum_i V_i \cdot \nabla \phi_{ext}(X_i).$$

Attention, pour simplifier les formules, on a écrit dans la suite $\sum_{i \neq j}$ pour remplacer $\sum_i \sum_{j \neq i}$. Cela ne prête pas trop à confusion si l'on fait attention que les sommes doubles sont toujours précédées d'un N^{-2} . Avec cette convention, on obtient en dérivant l'énergie potentielle

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{pot}(t) &= \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} \nabla \phi(X_i - X_j) \cdot (\dot{X}_i - \dot{X}_j) + \frac{1}{N} \sum_i \nabla \phi_{ext}(X_i) \cdot \dot{X}_i \\ &= \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} \nabla \phi(X_i - X_j) \cdot V_i - \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} \nabla \phi(X_i - X_j) \cdot V_j + \frac{1}{N} \sum_i \nabla \phi_{ext}(X_i) \cdot V_i \\ &= \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} \nabla \phi(X_i - X_j) \cdot V_i - \frac{1}{2N^2} \sum_{i \neq j} \nabla \phi(X_j - X_i) \cdot V_i + \frac{1}{N} \sum_i \nabla \phi_{ext}(X_i) \cdot V_i \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \nabla \phi(X_i - X_j) \cdot V_i + \frac{1}{N} \sum_i \nabla \phi_{ext}(X_i) \cdot V_i. \end{aligned}$$

Pour passer de la seconde à la troisième ligne, on a juste interverti les indices (muets) i et j dans la seconde somme. Pour obtenir la dernière ligne, on a ensuite utilisé la parité de ϕ , qui implique que $\nabla \phi$ est impair (petit exo?). On remarque pour conclure que la dérivée en temps de l'énergie potentielle est exactement l'opposé de la dérivée de l'énergie cinétique. \square

Caractère bien posé du système d'EDO. ^{eq:Newton} Il est très intéressant de savoir dire dans quelles conditions les trajectoires du système (I.1) sont bien définies, c'est-à-dire de répondre précisément au problème de Cauchy. En introduisant les notations

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_N &:= (X_1, \dots, X_N), & \mathcal{V}_N &:= (V_1, \dots, V_N) \\ \mathcal{Z}_N &:= (\mathcal{X}, \mathcal{V}) = (X_1, \dots, X_N, V_1, \dots, V_N), \end{aligned}$$

le problème de Cauchy (au temps $t = 0$ uniquement car le système est "autonome") local et global s'écrit :

Définition 1 (Problème de Cauchy). ^{eq:Newton} *Pour des conditions initiales \mathcal{Z}_N^0 fixées, existe-t-il une unique solution $t \mapsto \mathcal{Z}_N(t)$ de (I.1) définie au moins sur un ouvert autour de 0, qui vérifie cette condition initiale $\mathcal{Z}_N(0) = \mathcal{Z}_N^0$. Si oui, peut-on assurer que cette unique solution est définie (en temps) sur \mathbb{R} entier ?*

Remarquons, qu'avec la notation \mathcal{Z}_N regroupant toutes les positions et vitesses, on peut réécrire le système d'EDO (I.1) de $2N$ équations en dimension d comme une seule EDO sur \mathcal{Z}_N , dans un espace de dimension $2dN$. En effet, si on introduit le champ de vecteur $\mathcal{B}_N : \mathbb{R}^{2dN} \rightarrow \mathbb{R}^{2dN}$ défini par

$$\mathcal{Z}_N = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \\ V_1 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{B}_N(\mathcal{Z}_N) := \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_N \\ -\frac{1}{N} \sum_{j \geq 2} \nabla \phi(X_1 - X_j) - \nabla \phi_{ext}(X_1) \\ \vdots \\ -\frac{1}{N} \sum_{j \leq N-1} \nabla \phi(X_N - X_j) - \nabla \phi_{ext}(X_N) \end{pmatrix},$$

alors le système d'EDO (I.1) se réécrit $\dot{\mathcal{Z}}_N = \mathcal{B}_N(\mathcal{Z}_N)$.

Si la fonction \mathcal{B}_N est localement lipschitzienne, on pourra appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et dire que le problème de Cauchy local est bien posé, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une seule solution maximale définie sur un intervalle de temps I contenant 0. Pour éviter que cette solution ne soit que locale en temps, ce qui veut dire que $I \neq \mathbb{R}$, il faut montrer qu'aucune des vitesses ne peut devenir infinie en un temps fini, ce qui demande un contrôle par le bas sur le potentiel. Ce ceci est précisé dans la proposition ci-dessous.

prop:Cauchy

Proposition 2. *Si le potentiel d'interaction ϕ et le potentiel extérieur ϕ_{ext} sont de classe \mathcal{C}^2 alors le champ de vecteur \mathcal{B}_N est localement lipschitzien, et donc le problème de Cauchy associé à (I.1) est localement bien posé.*

Si de plus les potentiels ϕ et ϕ_{ext} vérifient la borne ci-dessous pour une constante $\kappa > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \phi(x) \geq -\kappa(1 + |x|^2), \quad \phi_{ext}(x) \geq -\kappa(1 + |x|^2),$$

alors ces solutions uniques sont globales en temps et le problème de Cauchy est donc globalement bien posé.

Preuve de la proposition 2. Si $\nabla \phi$ et $\nabla \phi_{ext}$ sont lipschitzien de constante K sur la boule $B(0, R)$ de centre 0 et rayon R dans \mathbb{R}^d , alors on peut montrer que \mathcal{B}_N est Lipschitzienne de même constante K sur le sous-ensemble

$$\{\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{2dN}, \text{ tels que } \forall i \leq N, |X_i| \leq R\}.$$

La démonstration de cette intéressante propriété est laissée en exercice. Cela permet de conclure que le problème de Cauchy local est bien posé grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (à rappeler).

Pour l'existence globale en temps, on utilise la conservation de l'énergie totale, qui sera vraie tant que la solution existe d'après la proposition 1. En utilisant la borne par le bas sur le potentiel, on obtient avec la notation $M_2(t) := \frac{1}{N} \sum_i |X_i|^2$

$$\begin{aligned} E_{cin}(t) &= E_{tot}(t) - E_{pot}(t) = E_{tot}(0) - E_{pot}(t) \\ &\leq E_{tot}(0) + \frac{\kappa}{2N^2} \sum_{i \neq j} (1 + |X_i - X_j|^2) + \frac{\kappa}{N} \sum_i (1 + |X_i|^2) \\ &\leq E_{tot}(0) + 2\kappa + \frac{\kappa}{2N^2} \sum_{i \neq j} 2(|X_i|^2 + |X_j|^2) + \frac{\kappa}{N} \sum_i |X_i|^2 \\ &\leq E_{tot}(0) + 2\kappa(1 + M_2(t)). \end{aligned}$$

Maintenant, on peut dériver la quantité de mouvement par rapport à t . On obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M_2(t) &= \frac{2}{N} \sum_i X_i \cdot V_i \\ \left| \frac{d}{dt}M_2(t) \right| &\leq \frac{2}{N} \left(\sum_i |X_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i |V_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{2M_2(t)E_{cin}(t)}.\end{aligned}$$

En utilisant la borne obtenue ci-dessus pour l'énergie cinétique, cela donne, pour une certaine constante C dont la valeur précise ne nous intéresse pas, que

$$\left| \frac{d}{dt}M_2(t) \right| \leq C\sqrt{M_2(t)(1 + M_2(t))}.$$

Ou même encore mieux

$$\left| \frac{d}{dt}(1 + M_2(t)) \right| \leq C(1 + M_2(t)).$$

Cela implique que $M_2(t)$ est toujours borné par $e^{C|t|}$, et ensuite que l'énergie cinétique est aussi borné par $E_{cin}(t) \leq E_{tot}(0) + 2\kappa e^{C|t|}$. Cela empêche qu'une vitesse devienne infinie en un temps fini. On conclut donc que les solutions de (I.I) sont globales (en temps). \square

Malheureusement, comme on l'a déjà vu, les potentiels physiquement intéressants ne sont jamais complètement réguliers. On ne peut donc appliquer ce théorème qu'à leur version régularisée ϕ^ε . Mais on peut aller plus loin, si on connaît la théorie DiPerna-Lions, plus récente que celle de Cauchy-Lipschitz¹, qui assure l'existence d'un flot de solutions $\mathcal{Z}_N(t, \mathcal{Z}_N^0)$ défini pour presque toutes conditions initiales \mathcal{Z}_N^0 , à condition que le champ de vecteur \mathcal{B}_N soit dans $W^{1,1}$. Cela ne s'applique pas encore tout à fait au cas électrostatique ou gravitationnel (voir les exercices), mais une légère amélioration de la théorie DiPerna-Lions permet de l'appliquer au cas (répulsif) électrostatique. Attention toutefois, rien ne marche dans le cas attractif.

1.3 Quelques propositions d'exercices.

1. Essayer d'adapter la dynamique (I.I) ^{eq:Newton} au cas d'un domaine régulier à bords.
2. Calculer la constante de Lipschitz de $\nabla\phi_g^\varepsilon$, la force gravitationnelle régularisée associée au potentiel défini plus haut (on demande bien la constante de Lipschitz de la force, pas celle du potentiel). Même question si l'on régularise le potentiel de Lennard-Jones.
3. Faire la preuve de la conservation de la quantité de mouvement.
4. Vérifier en détail le point laissé en suspens dans la preuve de la proposition 2. ^{prop:Cauchy} C'est-à-dire en simplifiant que l'application \mathcal{B}_N est bien globalement K -Lipschitzienne lorsque $\nabla\phi$ l'est.
5. Vérifier que si $\nabla\phi \in W^{1,1}$, alors \mathcal{B}_N est aussi $W^{1,1}$.
6. Vérifier que la force $\nabla\phi_c$ n'est pas dans $W^{1,1}$.
7. On choisit un potentiel d'interaction du type $\phi_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$, pour un $\alpha > 0$ en dimension 3. Pour quelle valeur de α a-t-on $\nabla\phi_\alpha \in W^{1,1}$?

1. La théorie Cauchy-Lipschitz date des années 1840 alors que celle de DiPerna-Lions a été développée au début des années 1990.

2 Une équation sur les mesures empiriques.

Définition 2. A un système de N particules de position $\mathcal{Z} = (X_i, V_i)_{i \leq N}$, on peut associer une mesure empirique $\mu_{\mathcal{Z}}^N$ qui est une somme de petites masses de Dirac

$$\mu_{\mathcal{Z}}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_i, V_i)}, \quad (2.1) \quad \text{def:MesEmp}$$

où $\delta_{(x,v)}$ désigne la masse de Dirac au point (x, v) .

On rappelle que la mesure de Dirac au point z notée δ_z est définie par

$$\forall A \subset \mathbb{R}^{2d}, \quad \delta_z(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } z \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

C'est un outil très utilisé en physique statistique et en probabilités, et qui devient de plus en plus important (par contagion) en EDP. Si le système de particules évolue au cours du temps, on obtient aussi une mesure empirique dépendant du temps $\mu^N(t) := \mu_{\mathcal{Z}(t)}^N$. Peut-on écrire une équation d'évolution pour cette mesure empirique? Cette équation devrait-être une équation aux dérivées partielles, mais la mesure empirique est un objet singulier absolument non continu et encore moins dérivable en x et v . Donc, si on veut trouver une équation pour cet objet, il faut forcément penser en terme de distribution.

Proposition 3. Si pour un $T > 0$, $\mathcal{Z}(t)$ est solution du système d'EDO ^{eq:Newton} (1.1) sur l'intervalle $[0, T]$, et que la force d'interaction $\nabla\phi$ est continue et vérifie $\nabla\phi(0) = 0$, alors

$$\mu^N(t) := \mu_{\mathcal{Z}(t)}^N$$

est solution sur $[0, T]$ au sens des distributions de l'équation de Vlasov

$$\partial_t \mu^N(t) + v \cdot \nabla_x \mu^N(t) + F(t, x) \cdot \nabla_v \mu^N(t) = 0 \quad (2.2) \quad \text{eq:MesVla}$$

avec condition initiale $\mu^N(0) = \mu_{\mathcal{Z}^0}^N$ et une force F donnée par

$$F(t, x) = -\langle \mu^N(t), \nabla\phi(x - \cdot) \rangle = - \int \nabla K(x - y) \mu^N(t, dy, dw)$$

Remarquons avant de donner la preuve de cette proposition que dans les cas physiquement intéressants, la force d'interaction n'est pas continue à cause de la singularité en zéro. Cela pose pas trop de problèmes tant que l'on peut supposer que les particules ne s'approchent pas trop les unes des autres, mais devient très embêtant dans le cas contraire. Nous en reparlerons notamment lorsque nous introduirons les opérateurs de collisions. L'hypothèse $\nabla\phi(0) = 0$ est moins problématique, car on suppose toujours généralement qu'une particule n'interagit pas avec elle-même.

Preuve de la proposition 3. ^{prop:EqMesEmp} Pour cela, on choisit donc une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}$, la classe de Schwartz, qui ne dépend pour l'instant que de x et v et on forme le produit distribution-fonction test

$$\langle \mu^N(t), \varphi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi(X_i(t), V_i(t)).$$

On peut ensuite dériver ce produit par rapport au temps. On supposera pour cela que le potentiel d'interaction ϕ est dans la classe de Schwartz \mathcal{S} , pour ne pas avoir de problème avec les

distributions (Mais on verra que cette hypothèse n'est pas obligatoire, on verra comment s'en affranchir par la suite). On obtient

$$\frac{d}{dt}\langle\mu^N(t),\varphi\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^NV_i(t)\cdot\nabla_x\varphi(X_i(t),V_i(t))+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^NF(t,X_i(t))\cdot\nabla_v\varphi(X_i(t),V_i(t)), \quad (2.3)$$

eq:DerivDistrib

avec la notation

$$F(t,x):=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N\nabla\phi(x-X_j)=\langle\mu^N(t),-\nabla K(x-\cdot)\rangle.$$

Attention, $F(t,X_i)$ ne correspond bien à la formule donnée pour la force d'interaction que si l'on suppose $\nabla\phi(0)=0$, ce qui revient à dire qu'une particule n'interagit pas avec elle-même. Dans ce cas en effet, la somme sur les j différents de i coïncide avec la somme sur tous les j .

Ensuite, on peut réécrire les deux termes du membre de droite en remarquant que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^NV_i(t)\cdot\nabla_x\varphi(X_i(t),V_i(t))&=\langle\mu^N(t),v\cdot\nabla_x\varphi\rangle \\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^NF(t,X_i(t))\cdot\nabla_v\varphi(X_i(t),V_i(t))&=\langle\mu^N(t),F(t,x)\cdot\nabla_v\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Cela permet de réécrire l'équation (2.3) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\mu^N(t),\varphi\rangle&=\langle\mu^N(t),v\cdot\nabla_x\varphi\rangle+\langle\mu^N(t),F(t,x)\cdot\nabla_v\varphi\rangle, \\ &=\langle\mu^N(t),\operatorname{div}_x(v\varphi)\rangle+\langle\mu^N(t),\operatorname{div}_v(F(t,x)\varphi)\rangle, \\ &=-\langle\nabla_x\mu^N(t),v\varphi\rangle-\langle\nabla_v\mu^N(t),F(t,x)\varphi\rangle, \\ &=-\langle v\cdot\nabla_x\mu^N(t),\varphi\rangle-\langle F(t,x)\cdot\nabla_v\mu^N(t),\varphi\rangle. \end{aligned}$$

Dans la succession d'égalité ci-dessus, on a utilisé une formule pour la divergence de d'un scalaire fois un vecteur, la définition de la dérivation au sens des distribution, et la définition de la multiplication d'une distribution par une fonction dans la classe de Schwartz \mathcal{S} .

Jusqu'ici, on a été très rigoureux. Puisque l'égalité est valable pour tout $\varphi\in\mathcal{S}$, on peut cette fois-ci formellement enlever les crochets de dualité, et les φ et écrire ainsi que $\mu^N(t)$ vérifie l'équation de Vlasov. Le faire immédiatement n'est pas complètement rigoureux, mais on peut le démontrer en utilisant les distributions. On introduit alors une fonction de classe C^∞ à support compact $\chi:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}$. On a alors en posant $g(t)=\chi(t)\langle\mu^N(t),\varphi\rangle$

$$g(T)=\chi(T)\langle\mu^N(T),\varphi\rangle=0, \quad g(0)=\chi(0)\langle\mu^N(0),\varphi\rangle=\langle\mu_{\mathbb{Z}^0}^N,\chi(0)\varphi\rangle.$$

On peut ensuite dériver g pour obtenir d'après ce qui suit

$$\begin{aligned} -\langle\mu_{\mathbb{Z}^0}^N,\chi(0)\varphi\rangle&=g(T)-g(0)=\int_0^Tg'(t)dt \\ &=\int_0^T\chi'(t)\langle\mu^N(t),\varphi\rangle dt+\int_0^T\chi(t)\frac{d}{dt}\langle\mu^N(t),\varphi\rangle dt \\ &=\int_0^T[\langle\mu^N(t),\chi'(t)\varphi\rangle+\chi(t)\langle\mu^N(t),v\cdot\nabla_x\varphi\rangle+\chi(t)\langle\mu^N(t),F(t,x)\cdot\nabla_v\varphi\rangle] dt \\ &=\int_0^T\iint[\partial_t(\chi\varphi)+v\cdot\nabla_x(\chi\varphi)+F(t,x)\cdot\nabla_v(\chi\varphi)]\mu^N(t,dx,dv) dt. \end{aligned}$$

ensuite, on utilise le fait que les combinaisons de fonctions du type $\chi(t)\varphi(x, v)$ sont denses dans l'ensemble des fonctions $\phi(t, x, v)$ de la classe \mathcal{S} (voir exercices). Cela permet d'écrire pour toute fonction ϕ de la classe \mathcal{S} que

$$-\langle \mu_{\mathcal{Z}^0}^N, \phi(0) \rangle = \int_0^T \iint [\partial_t \phi + v \cdot \nabla_x \phi + F(t, x) \cdot \nabla_v \phi] \mu^N(t, dx, dv) dt, \quad (2.4)$$

eq:VlaDist

ce qui signifie exactement que $\mu^N(t)$ vérifie l'équation de Vlasov ^{prop:EqMesEmp} (3) au sens des distributions.

Si ∇ n'est pas dans la classe \mathcal{S} , on peut quand même s'en sortir en remarquant que μ^N n'est pas n'importe quelle distribution, mais une mesure. Et donc que le produit $F\mu^N$ a encore un sens tant que F est continu. Et comme F est une combinaison de terme du type $\nabla\phi(x - X_j)$, il sera continu si $\nabla\phi$ l'est. \square

2.1 Proposition d'exercices.

1. On rajoute dans le système de N particules un terme de friction. Il devient alors

$$\dot{X}_i = V_i, \quad \dot{V}_i = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla\varphi(X_i - X_j) - \lambda V_i. \quad (2.5)$$

Quelle est alors l'équation (de type Vlasov) vérifiée par les mesures empiriques associées ?

2. Que deviennent les équations de conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour le système de la question précédente.
3. Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant le nouveau terme $-\lambda V_i$ par

$$-\lambda \left[V_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_j \right].$$

Ce type d'équation est par exemple utilisé pour modéliser des nuages d'oiseaux.

3 Le niveau mésoscopique : les équations cinétiques.

Au niveau mésoscopique, on ne décrit plus le système en donnant les positions et les vitesses de toutes les particules, mais en donnant la distribution "approchée" $f(t, x, v)$ des particules. Cette distribution dépend du temps, de la position et de la vitesse. Elle dit que pour (t, x, v) donnés, et des vecteurs dx, dv très petits, le nombre $N_{t,x,v,dx,dv}$ de particules comprises au temps t dans la boîte

$$\prod_{i=1}^d [x_i, x_i + dx_i] \prod_{j=1}^d [v_j, v_j + dv_j]$$

est approximativement égal à

$$N_{t,x,v,dx,dv} = N f(t, x, v) \prod_{i=1}^d dx_i \prod_{i=1}^d dv_i.$$

Ceci est nécessairement une approximation, il faut faire des moyennes sur des boîtes de taille très petite. Petite à l'échelle du système étudié (micromètre pour un plasma, des centaines années-lumières pour une galaxie), mais quand même suffisamment grande pour contenir un nombre

important de particules. En effet, comme on remplace le comportement des particules qui sont à l'intérieur de la même boîte par un comportement moyen, il faut que cette boîte contienne un nombre suffisant de particules pour cette moyenne soit justifiée.

En cours, nous avons fait le bilan des particules qui entrent et sortent de la boîte en question pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, et nous avons obtenu l'équation de Vlasov suivante

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = 0 \quad (3.1) \quad \boxed{\text{eq:V1a}}$$

avec condition initiale $f(0)$ donnée et une force F donnée par

$$F(t, x) = - \int \nabla K(x - y) f(t, y, w) dy dw = - \int \nabla K(x - y) \rho(t, y) dy.$$

Le passage par les mesures empiriques permet de faire des choses plus rigoureuses. En fait, pour un système de particules donné, la fonction f n'est qu'une approximation. Mais il existe néanmoins une mesure qui compte exactement le nombre de particules dans les boîtes : c'est la mesure empirique μ^N associée au système. Avec ce point de vue, l'approximation cinétique correspond donc à remplacer une mesure très singulière μ^N par une mesure $f(t, x, v) dx dv$ continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme on a vu dans la section précédente que la mesure $\mu^N(t)$ vérifiait déjà l'équation de Vlasov, on peut logiquement l'écrire aussi pour f .

La justification rigoureuse du passage des mesures empiriques μ^N aux mesures régulières f ne peut se faire que dans la limite où le nombre de particule devient infini, avec la masse de chacune des particules de l'ordre de $1/N$, de manière à conserver la masse totale. C'est ce qu'on appelle une limite de champ moyen, car pour calculer la force, on fait bien une moyenne des contributions de toutes les autres particules. Ces limites de champ moyen ont été rendues rigoureuses à la fin des années 70 par plusieurs mathématiciens et physiciens : Dobrushin, Braun et Hepp, Neunzert et Wick, dans le cas où la force d'interaction est $-\nabla K$ est Lipschitzienne. Pour les cas avec une singularité à l'origine, on ne sait faire que pour des singularités pas trop grandes (voir Hauray Jabin).

3.1 Préservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

La première étape est de retrouver les équivalent continus (pour f) des formules pour la quantité de mouvement et l'énergie. En utilisant les mesures empiriques, on peut remarquer que quantité de mouvement et énergie du système discret peuvent se réécrire :

– Quantité de mouvement

$$P_{tot}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i = \int v \mu^N(dx, dv)$$

– Énergie cinétique

$$E_{cin}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{V_i^2}{2} = \int \frac{v^2}{2} \mu^N(dx, dv)$$

– Énergie potentielle

$$E_{pot}^N = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \phi(X_i - X_j) = \iint \phi(x - y) \mu^N(dx, dv) \mu_N(dy, dw),$$

avec pour l'égalité sur l'énergie la condition déjà rencontré sur l'absence d'auto-interaction $\nabla_p \text{hi}(0) = 0$.

Pour définir la quantité de mouvement, les énergies pour le modèle mésoscopique, il suffit dont de remplacer μ^N par f dans les formulations intégrales écrites précédemment. On obtient

Définition 3. *La quantité de mouvement, les énergies cinétique et potentielle d'une distribution mésoscopique f sont définies par*

$$M_{tot}(f) := \int f(dx, dv) \quad (3.2) \quad \text{def:MtotVla}$$

$$P_{tot}(f) := \int v f(dx, dv) \quad (3.3) \quad \text{def:PtotVla}$$

$$E_{cin}(f) := \int \frac{v^2}{2} f(dx, dv) \quad (3.4) \quad \text{def:Ecinvla}$$

$$E_{pot}(f) := \frac{1}{2} \iint \phi(x-y) f(dx, dv) f(dy, dw) = \frac{1}{2} \iint \phi(x-y) \rho(dx) \rho(dy) \quad (3.5) \quad \text{def:EpotVla}$$

On s'intéresse aussi à la quantité totale de particules (ou masse) pour le système mésoscopique car on n'a plus ce nombre fixé de particules qui ne pouvait guère évoluer. On a pas écrit de dépendance en temps explicite pur f dans cette définition car elle n'est importante à ce stade. Mais elle le devient si on s'intéresse à la conservation de ces quantités au cours du temps, pour une solution de l'équation de Vlasov (B.1).

prop:PresVla

Proposition 4. *Si $f \in C([0, T], \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2d}))$ est une solution de l'équation de Vlasov au sens des distributions, et que la force d'interaction $\nabla \phi$ est continue et impair, alors $M_{tot}[f(t)]$, $P_{tot}[f(t)]$, et $E_{tot}[f(t)]$ ne dépendent pas du temps :*

$$M_{tot}[f(t)] = M_{tot}[f^0], \quad P_{tot}[f(t)] = P_{tot}[f^0], \quad E_{tot}[f(t)] = E_{tot}[f^0].$$

Preuve de la proposition 4. On va commencer par donner une preuve non rigoureuse, mais qu'il est important de savoir faire, car elle physiquement pertinente, et qu'elle sera la base pour construire la démonstration rigoureuse qui suivra.

Étape 1 : Des arguments heuristiques. Pour étudier la préservation de la masse $\int f(t, x, v) dx dv$, il est raisonnable de partir de l'équation de Vlasov (B.1), et de l'intégrer en position et vitesse, puisque cela fait apparaître la masse en question. On obtient en effet

$$\int \partial_t f(t, x, v) dx dv + \int v \cdot \nabla_x f(t, x, v) dx dv + \int F(t, x) \nabla_v f(t, x, v) dx dv = 0.$$

En acceptant d'invertir dérivation et intégrale, et en réécrivant les termes avec ∇ sous forme divergence, on obtient

$$\partial_t \left(\int f(t, x, v) dx dv \right) + \int \text{div}_x(vf) dx dv + \int \text{div}_v(Ff) dx dv = 0.$$

Ensuite, on sait d'après le théorème de Stokes que l'intégrale d'une divergence est égale au flux sur la frontière. Ici, on est sur tout l'espace, et il faudrait donc considérer que l'on applique le théorème de Stokes sur des boules de plus en plus grandes. Mais si f est suffisamment petite à l'infini, on va obtenir que l'intégrale sur le bord s'annule à la limite. Et donc que la contribution des deux derniers termes s'annule. On obtient donc que

$$\frac{d}{dt} M_{tot}[f(t)] = \frac{d}{dt} \left(\int f(t, x, v) dx dv \right) = 0.$$

On peut faire le même raisonnement pour la quantité de mouvement : il faut multiplier l'équation de Vlasov (3.1) par v avant d'intégrer, appliquer la version "infinie" de Stokes et d'utiliser l'imparité de $\nabla\phi$ (Exercice). Cela marche aussi pour l'énergie totale : on obtient d'abord l'équation de l'énergie cinétique en multipliant par $v^2/2$ l'équation de Vlasov et en intégrant. Cela donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{cin}[f(t)] &= - \int \frac{v^2}{2} \operatorname{div}_x(vf) \, dx dv - \int \frac{v^2}{2} \operatorname{div}_v(Ff) \, dx dv \\ &= 0 + \int F \cdot vf \, dx dv = \int F(t, x)j(t, x) \, dx,\end{aligned}$$

si on introduit la quantité de mouvement locale

$$j(t, x) = \int v f(t, x, v) \, dx dv. \quad (3.6)$$

def:QuantMouv

Pour l'énergie potentielle qui s'exprime plus simplement en fonction de ρ , il faudrait mieux partir de l'équation sur ρ . Pour l'obtenir formellement, on écrit l'équation de Vlasov, et on l'intègre en v seulement. On obtient en intervertissant dérivées et intégrales que

$$\partial_t \left(\int f(t, x, v) \, dv \right) + \operatorname{div}_x \left(\int v f \, dv \right) + \int \operatorname{div}_v(Ff) \, dv = 0.$$

Selon la règle heuristique déjà utilisée, le troisième terme s'annule. Et on reconnaît dans le second j . Ce qui nous donne au final

$$\partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}_x j(t, x) = 0 \quad (3.7)$$

eq:ConsMass

Cette équation dite de "conservation de la masse" (il faut entendre ici masse au sens local), est utile pour dériver l'énergie potentielle. En effet, de la formule (3.5), on obtient grâce à la symétrie $x \leftrightarrow y$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{pot}[f(t)] &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \iint \phi(x-y) \rho(t, x) \rho(t, y) \, dx dy \right) \\ &= \iint \phi(x-y) \partial_t \rho(t, x) \rho(t, y) \, dx dy.\end{aligned}$$

Si on injecte dans la dernière ligne l'équation de conservation (3.7) et on effectue une intégration par partie avec la convention déjà vue qu'il n'y a pas de termes de bords, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{pot}[f(t)] &= - \iint \phi(x-y) \operatorname{div}_x j(t, x) \rho(t, y) \, dx dy \\ &= \iint j(t, x) \nabla \phi(x-y) \rho(t, y) \, dx dy \\ &= \int j(t, x) (\nabla \phi(x-y) \rho(t, y) \, dy) \, dx \\ &= - \int j(t, x) F(t, x) \, dx,\end{aligned}$$

car on a reconnu dans la grande parenthèse l'expression de la force. Finalement, on obtient l'opposé de la dérivée de l'énergie cinétique.

$$\frac{d}{dt}E_{tot}[f(t)] = \frac{d}{dt}E_{cin}[f(t)] + \frac{d}{dt}E_{pot}[f(t)] = 0.$$

Étape 2 : Avec plus de rigueur mathématique.

Obtenir les conservations dérivées heuristiquement ci-dessus de manière est toujours possible. Mais il faut pour cela avoir quelques hypothèses, dites “a priori” sur la solution de l’équation de Vlasov (2.4) avec la fonction $g(t)\chi_R(x)\chi_R(v)$ comme fonction test, pour toute fonction $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, on montre (exercice) que l’égalité ci-dessous est vraie au sens des distributions

$$\partial_t \langle f(t), \chi_R(x)\chi_R(v) \rangle - \langle f(t), v \cdot \nabla[\chi_R](x)\chi_R(v) \rangle - \langle f(t), F(t, x) \cdot \nabla[\chi_R](v)\chi_R(x) \rangle = 0. \quad (3.8)$$

eq:DistMassCons

On remarque ensuite que $\nabla[\chi_R](y) = \frac{1}{R}\nabla\chi(\frac{x}{R})$. Le second terme est borné uniformément en temps, si

$$\text{avec } \|f\|_{L^1_{x,v}} := \int f(x, v)(1 + |v|^2) dx dv, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_{L^1_{x,v}} < +\infty.$$

En effet, on a alors si $R \geq 1$

$$|\langle f(t), v \cdot \nabla[\chi_R](x)\chi_R(v) \rangle| \leq \frac{1}{R} \|\chi\|_\infty \|\nabla\chi\|_\infty \int f(t, x, v) |v| dx dv \leq \frac{C}{R} \|f\|_{L^1_{x,v}}$$

De même avec le troisième terme, si $\sup_{t,x} F(t, x) < +\infty$, alors

$$|\langle f(t), F(t, x) \cdot \nabla[\chi_R](v)\chi_R(x) \rangle| \leq \frac{1}{R} \|f(t)\|_{L^1} \|F(t)\|_\infty \|\chi\|_\infty \|\nabla\chi\|_\infty.$$

Cela implique que la fonction $t \mapsto \langle f(t), \chi_R(x)\chi_R(v) \rangle$ a une dérivée bornée au sens des distributions, avec une borne indépendante de R . Cela implique que ces fonctions sont dans $W^{1,\infty}$ (et donc qu’elles sont Lipschitziennes grâce au théorème de Rademacher).

Ensuite, on peut montrer que

$$|M_{tot}[f(t)] - \langle f(t), \chi_R(x)\chi_R(v) \rangle| \leq \frac{1}{R^2} \|f(t)\|_{L^1_{x,v}}.$$

Cela permet de dire que la distribution $t \mapsto \langle f(t), \chi_R(x)\chi_R(v) \rangle$ converge vers $M_{tot}[f(t)]$ lorsque $R \rightarrow \infty$. De plus, on voit également grâce aux bornes obtenues que lorsque $R \rightarrow +\infty$, les deux derniers termes de l’égalité (3.8) tendent vers 0. Cela veut dire que $M[f(t)]$ satisfait au sens des distributions l’équation

$$\frac{d}{dt} M_{tot}[f(t)] = 0,$$

ce qui signifie que c’est une constante.

La même stratégie peut-être utilisée pour démontrer rigoureusement la préservation de la quantité de mouvement, et celle de l’énergie totale. Il faut toujours suivre les raisonnements heuristiques, et remplacer les étapes formellement non rigoureuses par des arguments inattaquables, en utilisant autant de *fonctions tests* du type de χ_R qu’il le faut, et en passant ensuite à la limite pour R grand. \square

3.2 Proposition d'exercice ?

1. Essayer de justifier rigoureusement que si $(t, x, v) \mapsto f(t, x, v)$ est une solution de l'équation de Vlasov qui vérifie

$$f \in L_t^\infty(L^1_x, v), \quad |v|f \in L_t^\infty(L^1_{x,v}).$$

alors la densité en position $\rho(t, x)$ est bien définie et appartient à $L_t^\infty(L^1_x)$ et vérifie l'équation de conservation de la masse (3.7).

2. On suppose que la dimension d'espace est égale à 1. Écrire l'équation vérifiée par le courant j . Il faudra introduire la quantité $T(t, x) = \int f(t, x, v)v^2 dv - \frac{j^2}{\rho}$.
3. Écrire les équations vérifiées par la densité ρ (et le courant j) si la distribution f est cette fois-ci solution de l'équation

$$\partial_t f + v \cdot_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f - \lambda \operatorname{div}_v(vf) = 0$$

4 Les opérateurs de collisions.

4.1 Différence entre champ moyen et collisions.

On dit que l'équation de Vlasov est de type champ moyen, car elle effectue une moyenne des interactions entre particules. L'effet des particules situées autour de x est remplacé par l'interaction à la position x fois la "densité" régularisée des particules autour de x . Cela implique par exemple qu'une seule particule ne peut pas influencer de manière significative la trajectoire d'une autre particule. Seul un nombre important de particules peut le faire. Cela est tout à fait correct lorsque l'on considère des particules éloignées, mais peut être mis en défaut pour des particules trop proches, si le potentiel possède une singularité en 0. En effet, une seule particule peut influencer une autre de manière significative si elle l'approche de trop près. On parlera dans la suite de *collisions* pour désigner cela. Pour pouvoir quantifier ce phénomène des collisions, on introduit une taille $r > 0$, et on dit que deux particules entrent en collisions à un instant t , si la différence de leur position à t est en norme plus petite que $2r$. r correspond donc à la taille des particules. Elle dépend en général de la vitesse relative des particules, mais on peut la supposer constante pour les estimations qui suivent en utilisant la vitesse relative "moyenne".

Reste à savoir si le nombre de collisions est important ou non dans notre système de particules. Pour quantifier ce nombre de particules, la notion de libre parcours moyen est très utile.

4.2 Le libre parcours moyen

Physiquement, le libre parcours moyen est défini comme la distance moyenne parcourue par une particule du système entre deux collisions. On peut en fait l'exprimer grâce aux quantités physiques importantes que sont la densité moyenne ρ_m et la "taille" r des particules. En effet en dimension 3, pendant un parcours de longueur λ sans collisions, la particule occupera un volume d'environ $\pi r^2 \lambda$. On obtient en fait presque cette valeur si l'on suppose que la particule se déplace en ligne droite pendant cet intervalle de temps, et après ceci reste relativement correct si sa trajectoire n'est pas trop courbe. La question est donc de savoir, pour quelle longueur λ devient-il fréquent qu'il y ait une particule dans un volume $\pi r^2 \lambda$?

La réponse n'est pas possible pour un système de particules particulier, beaucoup trop complexe à maîtriser, mais on peut faire un calcul heuristique en considérant que les autres particules (X_2, \dots, X_N) sont immobiles et tirées au hasard selon la loi uniforme dans un volume V de taille

ρ_m^{-1} . On choisit donc un sous-ensemble V' de V de taille $\pi r^2 \lambda$ qui sera donc le volume occupé par la particule 1. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists j \leq 2, X_j \in V') &= 1 - \mathbb{P}(\forall j \leq 2, X_j \notin V') \\ &= 1 - (1 - \rho_m \pi r^2 \lambda)^N \\ &\approx 1 - e^{-N \rho_m \pi r^2 \lambda} \quad \text{si } \rho_m \pi r^2 \lambda \ll 1.\end{aligned}$$

Grace à cette approximation, on voit que si $N \rho_m \pi r^2 \lambda \gg 1$, alors la probabilité qu'il y ait une particule dans V' est quasiment égale à 1. Par contre, si $N \rho_m \pi r^2 \lambda \ll 1$, la probabilité d'avoir une particule dans V' est proche de zéro. Le basculement entre ces deux comportements est observé lorsque $N \rho_m \pi r^2 \lambda \approx 1$. Cela donne l'ordre de grandeur du libre parcours moyen que l'on peut définir ainsi

$$\lambda = \frac{1}{N \rho_m \pi r^2} \quad (4.1)$$

Ce calcul fait avec des hypothèses simplificatrices peut être considéré comme valable pour des systèmes de particules suffisamment grands. Le libre parcours moyen peut donc en général être estimé à l'aide des grandeurs physiques du système. Pour les galaxies qui sont en général très denses, ce libre parcours moyen est très grand et peut-être négligé. Pour les plasmas, il peut être très grand (plasmas de fusion ou dans la haute atmosphère) ou de la taille du système (plasmas industriels). Pour les gazs, il n'est jamais grand, même pour les gazs dit raréfiés, et peut devenir très petit (pour les gaz courants). Et il est toujours minuscule pour les liquides (eau,...).

Dans le cas où le libre parcours moyen est grand, on peut négliger les collisions et travailler directement avec l'équation de Vlasov (3.1). Dans le cas où il est de la taille du système, il faut écrire un terme de collision approprié et le rajouter dans l'équation de Vlasov. Dans le cas où il est très petit, il faudra se tourner vers les modèles de type fluide (voir le chapitre en question)

4.3 l'opérateur de Boltzmann pour des collisions élastiques.

Quand deux particules entrent en collisions, elles sont si proches qu'on peut supposer que le reste du système a la même influence sur leur dynamique, ce qui fait qu'on peut en première approximation la négliger. Avant de se rencontrer, les deux particules ont des vitesses, v et v' . Il est toujours difficile de décrire précisément ce qui se passe pendant la collision, mais par contre on peut toujours dire qu'après la collision, elles auront des vitesses v_* et v'_* . Comme on considère le système des deux particules comme isolé, la quantité de mouvement sera conservé, et si la collision est élastique, il y aura conservation de l'énergie cinétique. En dimension 3, on obtient ainsi 4 équations sur les vitesses sortantes : une équation vectorielle et une équation scalaire.

$$\begin{aligned}v + v' &= v_* + v'_* \\ v^2 + v'^2 &= v_*^2 + v'_*{}^2\end{aligned} \quad (4.2)$$

eq:ColCons

On peut vérifier que ces égalités sont équivalentes à

$$\frac{v + v'}{2} = \frac{v_* + v'_*}{2}, \quad |v - v'| = |v_* - v'_*|,$$

ce qu'on résumer en disant que la vitesse du centre de gravité et le module de la vitesse relative sont conservées. Comme il y a six inconnues : les composantes des deux vitesses de sortie, il reste $2 = 6 - 4$ degrés de liberté. On peut par exemple choisir l'angle *solide* θ que font les vecteurs

$v' - v$ et $v'_* - v_*$. Un angle solide est juste un vecteur de la sphère unité \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 . Une fois cet angle choisi, on connaît parfaitement les vitesses de sorties.

$$(v, v') \xrightarrow{\theta} (v_*, v'_*).$$

On peut remarquer à θ fixé, la transformation $(v, v') \mapsto (v_*, v'_*)$ préserve le volume : son jacobien est égal à 1. Et aussi que la transformation s'inverse simplement puisque

$$(v_*, v'_*) \xrightarrow{-\theta} (v, v')$$

Si on veut maintenant compter le nombre de collisions entre deux particules proche de x (à dx près) et avec vitesse v et v' (à dv et dv' près), entre t et $t + dt$, il est déjà raisonnable de penser qu'il est proportionnel à $f(t, x, v)dv$ et à $f(t, x, v')dv'$.

Ensuite, le libre parcours moyen est aussi à prendre en compte puisqu'entre t et $t + dt$, les particules parcourent une distance de l'ordre de $c dt$, avec c une certaine constante, et que c'est le rapport de cette distance parcourue au libre parcours moyen, qui donne la meilleure idée du taux de collisions. On rajoute donc un terme du type $\frac{c'}{\lambda} dt$, où c' est une nouvelle constante. Cela ne change pas grand chose à la formulation précédente, mais au moins la nouvelle constante c' est plus universelle ainsi, elle ne dépend plus guère du libre parcours moyen.

Ensuite, le bon libre parcours moyen à prendre en compte dépend de $|v - v'|$, et si l'on cherche à ne compter que les collisions qui engendrent une déviation proche de θ à $d\theta$ près, le taux va aussi logiquement dépendre de θ , et également de $|v - v'|$. On regroupe en général ces deux dépendances dans une fonction $B(|v - v'|, \theta)$, qui dépend du potentiel d'interaction. Son expression est délicate et on n'entrera donc pas dans ces détails dans ce court. On aura seulement besoin de savoir qu'elle est paire en θ : $B(|v - v'|, \theta) = B(|v - v'|, -\theta)$.

Pour résumer, le nombre de collisions autour de x (à dx près) entre deux particules de vitesse v et v' (à dv et dv' près), et avec un angle de déviation proche de θ à $d\theta$ près, est logiquement proportionnel de l'ordre de

$$\frac{c'}{\lambda} dt f(t, x, v) dv f(t, x, v') dv' B(|v - v'|, \theta) d\theta dx.$$

Chacune de ces collisions fait disparaître une particule de vitesse v (et aussi une particule de vitesse v'). Si on s'intéresse au nombre de particules de vitesse v qui disparaissent entre t et $t + dt$, il faut intégrer l'expression précédente sur toutes les vitesses v' possible pour l'autre particule, et tous les angles solides θ possibles pour les déviations. On obtient une fois divisé par $dt dx dv$ un terme de perte égal à

$$Q_B^{perte}(f, f) := \frac{c'}{\lambda} f(t, x, v) \int_{v'} \int_{\theta} f(t, x, v') B(|v - v'|, \theta) d\theta dv'. \quad (4.3)$$

eq:BoltPert

Mais il y a aussi des collisions entre particules autour de x qui font apparaître des particules de vitesse v . Pour les compter, il faut faire la somme de contributions similaires à celle écrite pour le terme de perte, mais en sommant cette fois-ci sur toutes les vitesses v_1 et v_2 , et angle de déviation θ qui font apparaître une particule de vitesse v . Cela peut paraître compliqué car non explicite, mais si l'on utilise la réversibilité de la transformation $(v, v') \xrightarrow{\theta} (v_*, v'_*)$, et le fait

2. On note bien \mathbb{S}^2 avec un exposant 2 même si c'est la sphère unité en dimension 3, car cette sphère est un sous-variété de dimension 2. C'est-à-dire qu'on a besoin de deux paramètres pour la décrire.

qu'elle préserve le volume, on peut faire un changement de variable pour simplifier

$$\begin{aligned} Q_B^{gain}(f, f) &= \frac{c'}{\lambda} \int_v \int_{v'} \int_\theta \delta_{(v_1, v_2) \leftarrow (v, \cdot)} f(t, x, v_1) f(t, x, v_2) B(|v_1 - v_2|, \theta) dv_1 dv_2 d\theta \\ Q_B^{gain}(f, f) &= \frac{c'}{\lambda} \int_{v'} \int_\theta f(t, x, v_*) f(t, x, v'_*) B(|v - v'|, \theta) dv' d\theta, \end{aligned} \quad (4.4) \quad \text{eq:BoltGain}$$

avec la convention que v_* et v'_* sont les vitesses de sorties après une collision entre particules de vitesse v et v' et d'angle de déviation θ . En additionnant les contributions de pertes (4.3) et de gains (4.4), on obtient enfin l'opérateur de Boltzmann complet :

$$Q_B(f, f) := \frac{c'}{\lambda} \int_{v'} \int_\theta (f(t, x, v_*) f(t, x, v'_*) - f(t, x, v) f(t, x, v')) B(|v - v'|, \theta) dv' d\theta, \quad (4.5) \quad \text{eq:BoltComp}$$

Que l'on peut réécrire sous la forme abrégé

$$Q_B(f, f) := \frac{c'}{\lambda} \int_{v'} \int_\theta (f_* f'_* - f f') B(|v - v'|, \theta) dv' d\theta, \quad (4.6) \quad \text{eq:BoltAbb}$$

avec les conventions $f = f(t, x, v)$, $f' = f(t, x, v')$ et ainsi de suite...

Préservation (locale) de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. L'opérateur de collisions de Boltzmann décrit des collisions entre particules qui préservent le nombre de particules (deux avant collision, deux après), leur quantité de mouvement ($v_* + v'_* = v + v'$) et leur énergie cinétique ($v_*^2 + v'_*{}^2 = v^2 + v'^2$). Il est donc normal que l'opérateur de Boltzmann préserve la masse, la quantité de mouvement et l'énergie, et ce au niveau local en espace, c'est-à-dire en intégrant ses quantités en vitesse uniquement.

$$\int_v Q(f, f) dv = 0, \quad \int_v v Q(f, f) dv, \quad \int_v v^2 Q(f, f) dv = 0.$$

En effet, pour la masse, on obtient par exemple

$$\begin{aligned} \int Q_B(f, f)(t, x, v) dv &= \iiint (f_* f'_* - f f') B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta \\ &= \iiint f_* f'_* B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta - \iiint f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta \\ &= \iiint f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta - \iiint f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta = 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière ligne, on a utilisé le fait que le changement de variables $(v, v', \theta) \mapsto (v_*, v'_*, -\theta)$ est une involution (c'est son propre inverse) qui préserve la mesure : son Jacobien vaut 1 (à démontrer en exercice).

Et on peut faire la même chose pour la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned}
\int Q_B(f, f)(t, x, v) dv &= \iiint v(f_* f'_* - f f') B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta \\
&= \iiint v f_* f'_* B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta - \iiint v f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta \\
&= \iiint \frac{v + v'}{2} f_* f'_* B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta - \iiint \frac{v + v'}{2} f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta \\
&= \iiint \frac{v_* + v'_*}{2} f_* f'_* B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta - \iiint \frac{v + v'}{2} f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta \\
&= \iiint \frac{v + v'}{2} f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta - \iiint \frac{v + v'}{2} f f' B(|v - v'|, \theta) dv dv' d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Pour obtenir la troisième ligne on a utilisé le changement de variable $(v, v', \theta) \mapsto (v', v, \theta)$ qui préserve la mesure. Pour la quatrième ligne, on utilise la préservation de la quantité de mouvement, et pour la cinquième, le changement de variables $(v, v', \theta) \mapsto (v_*, v'_*, -\theta)$. Les calculs pour l'énergie sont laissés en exercice.

4.4 Les collisions rasantes et l'opérateur de collision de Landau.

C'est un opérateur utilisé dans le cas où le potentiel d'interaction est Coulombien (voir dans d'autres cas dans une certaine limite). Dans ce cas en effet, ce sont les collisions avec vitesses relatives $v - v'$ et angles de déviations petits, qu'on appelle *collisions rasantes*, qui prédominent. $B(|v - v'|, \theta)$ est très grand lorsque $|v - v'|$ et θ sont petits, avec une singularité si forte que B n'est pas intégrable. Cela pose un problème car l'opérateur de collision de Boltzmann est alors mal défini dans ce cas. En fait, le fait que B deviennent très grand quand θ est petit veut dire que les collisions avec petit angle de déviation que l'on appelle *collisions rasantes* sont beaucoup plus importantes que celles avec fort angle de déviation. Dans ce cas, il faut prendre uniquement celles-ci en considération. Et pour les θ petit, on peut vérifier que

$$v_* = v + \frac{1}{2}[R_\theta - Id](v - v'), \quad v'_* = v' - \frac{1}{2}[R_\theta - Id](v - v')$$

où R_θ est une des rotations qui convient. Si θ est petit, $R_\theta \approx Id$, et on a $v_* = v + O(|\theta||v - v'|)$, et on peut si f est régulière faire un développement limité dans l'expression $f_* f'_* - f f'$ intégrée dans le noyau de collision de Boltzmann (4.6) (on oublie les variable t et x pour simplifier les notations).

$$\begin{aligned}
f_* f'_* - f f' &= f(v_*)f(v'_*) - f(v)f(v') \\
&= \nabla_v f(v) \cdot (v_* - v)f(v') + f(v)\nabla_v f(v') \cdot (v'_* - v') + O(|\theta|^2|v - v'|^2) \\
&= (\nabla_v f(v)f(v') - f(v)\nabla_v f(v')) \cdot (v_* - v) + O(|\theta|^2|v - v'|^2)
\end{aligned}$$

La suite est plus compliqué donc on ne l'exposera pas ici, mais ce déut de calcul explique pourquoi des dérivées vont apparaître quand on ne prend en compte que les collisions rasantes. En effet, si on poursuit la procédure à son terme, on obtient l'opérateur de Landau qui s'écrit (toujours en "oubliant" t et x)

$$Q_L(f, f)(v) := \operatorname{div}_v \left(\int_{v'} \frac{1}{|v - v'|^\beta} a(v - v') [\nabla_v f(v)f(v') - f(v)\nabla_v f(v')] dv' \right), \quad (4.7)$$

def : Landau

où $a(w)$ désigne le projecteur sur w^\perp .

$$a(w) := Id - \frac{w \otimes w}{|w|^2}.$$

On remarquera que si on définit la matrice $A(f, v)$ et le vecteur $b(f, v)$ par

$$A(f, v) := \int_{v'} \frac{1}{|v - v'|^\beta} f(v') a(v - v') dv', \quad b(f, v) := \int_{v'} \frac{1}{|v - v'|^\beta} a(v - v') \nabla f(v') dv',$$

l'opérateur de Landau peut se réécrire sous la forme

$$Q_L(f, f)(v) = \operatorname{div}_v (A(f, v) \nabla_v f - b(f, v) f).$$

Bien sûr cet opérateur est non linéaire, car les coefficients A et b dépendent de f . C'est ce qu'on appelle un opérateur de type Fokker-Planck (ou div-grad).

Pour simplifier (ce qui est très utile vu la difficulté de résolution de ces équations), on peut linéariser l'opérateur de Fokker-Planck, en supposant que l'on reste proche d'un certain état d'équilibre. Cela veut dire que l'on fixe les coefficients $A(v)$ et $b(v)$ de manière indépendante de f . Cela simplifie l'opérateur, et permet une analyse plus détaillée. Par exemple avec $A(v) = Id$ et $b(v) = v$, on tombe sur un opérateur linéaire très utilisé

$$Q(f)(v) := \operatorname{div}_v (\nabla_v f - v f) = \Delta_v f - \operatorname{div}_v (v f).$$

4.5 L'entropie

L'entropie d'une distribution f sur \mathbb{R}^{2d} est donnée par la définition ci-dessous.

def:Ent

Définition 4. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$ telle que $\int f(x, v)(1 + |x|^a + |v|^a) dx dv < \infty$, pour un $a > 0$. Alors la quantité

$$H(f) := \int f(x, v) \ln f(x, v) dx dv \tag{4.8}$$

def:Ent

est bien définie à valeur dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Il existe en particulier pour tout $a > 0$ une constante C_a telle que

$$H(f) \geq C_a - \int f(x, v)(1 + |x|^a + |v|^a) dx dv.$$

Cette quantité $H(f)$ s'appelle l'entropie mathématique de la distribution f .

Attention : On utilise le nom d'entropie car elle correspond bien à la notion d'entropie comme mesure du désordre, introduit en physique, à un détail important près : le signe. L'entropie mathématique est en fait l'opposé de l'entropie physique. Le principe physique qui veut que l'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter se traduit donc en math par la diminution de l'entropie d'un système isolé. Vu que les traditions sont bien ancrées dans chacune des disciplines, il est préférable de les conserver, et de penser à faire le changement quand on passe de l'une à l'autre.

En physique, on parle d'état désordonné pour un système physique lorsqu'il n'a peu de structure (pensez à une chambre non rangée, par exemple), et au contraire d'état ordonné si on peut y trouver des structures (comme dans une chambre rangée). L'entropie est une quantité qui permet de mesurer l'état de désordre d'un système. Le petit calcul ci-dessous, essaie d'expliquer pourquoi.

Une mesure du désordre ? Considérons un cube C de volume 1, séparé en deux parties C_g et C_d (gauche et droite) de volume $1/2$. On considère également N particules de positions $(X_i)_{i \leq N}$ choisies au hasard indépendamment selon la loi uniforme. On note N_g et N_d les variables aléatoires "nombre de particules à gauche" et "nombre de particules à droite". On a

$$N_g = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{C_g}(X_i), \quad N_d = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{C_d}(X_i) = N - N_g.$$

Comme $\mathbb{1}_{C_g}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ (la loi du pile ou face) pour tout i , N_g suit une loi binomiale de paramètre N et $1/2$: $\mathcal{B}(N, 1/2)$. Choisissons maintenant un $p \in [0, 1]$ et cherchons à estimer la probabilité que $N_g \approx pN$ ³

La loi des grands nombre dit grosso modo que pour N grand, cette probabilité sera proche de 1 si $p = 1/2$, et sera proche de 0 si $p \neq 1/2$. Mais on va essayer de quantifier cela. Si on arrondi pN à l'entier le plus proche, on peut écrire

$$\mathbb{P}(N_g = pN) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{pN} = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{(pN)!((1-p)N)!}.$$

en utilisant l'approximation de Stirling⁴

$$N! \underset{\infty}{\sim} N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N},$$

on peut trouver un équivalent quand $N \rightarrow \infty$ à cette probabilité car

$$\begin{aligned} \frac{N!}{(pN)!((1-p)N)!} &\underset{\infty}{\sim} \frac{N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}}{[pN]^{pN} e^{-pN} \sqrt{2\pi pN} [(1-p)N]^{(1-p)N} e^{-(1-p)N} \sqrt{2\pi(1-p)N}} \\ &\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{p^{pN} (1-p)^{(1-p)N} \sqrt{2\pi p(1-p)N}} \\ &\underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)N}} e^{-N[p \ln p + (1-p) \ln(1-p)]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)N}} e^{-N\mathbf{H}(p)} \end{aligned}$$

car l'entropie de la loi de Bernoulli avec paramètre p est définie par $H(p) = p \ln p + (1-p) \ln(1-p)$. Le terme qui varie le plus vite avec N est celui avec l'exponentielle. Si on oublie le terme avec la racine, on voit donc que la probabilité $\mathbb{P}(N_g = pN)$ est d'autant plus petite que l'entropie $H(p)$ est grande.

Sommairement, on en déduit que si on laisse faire le hasard, l'état le plus probable que l'on va obtenir est celui qui minimise l'entropie (mathématique). Tous les autres seront relativement peu fréquents. Mais même parmi ceux-ci, l'entropie permet de les classer selon leur fréquence d'apparition. Les $N_g = pN$ avec $H(p)$ moyen comme $p = \frac{1}{4}$ apparaîtront très peu souvent, mais encore bien plus souvent que les $N_g = pN$ avec $H(p)$ grand comme $p = 0$. Pour obtenir ces états peu probable, il ne faut donc pas laisser faire le hasard, et contraindre le système, ce qui explique qu'on appelle ses états des états ordonnés (ou partiellement ordonnés).

Ce calcul fait pour un cube découpé en 2 se généralise très bien à un cube découpé en m sous-cube $(C_i)_{i \leq m}$. On obtient une entropie définie pour les fréquences $(p_i)_{i \leq m}$ de chaque face par

$$H(p_1, \dots, p_m) = \sum_{i=1}^m p_i \ln p_i.$$

3. on ne fera pas mieux ici que cette approximation dans un sens vague. Pour justifier plus rigoureusement cela, il faut faire ce qu'on appelle en probabilité des grandes déviations, ce qui sort du programme de ce cours.

4. Ou sa version encore plus précisée $N! = (N/e)^N \sqrt{2\pi N} e^{\lambda N}$, avec $\frac{1}{2N+1} \leq \lambda_N \leq \frac{1}{2N}$.

Ensuite, si on passe à la limite sur le nombre de petits carrés, l'entropie ci-dessus se met à ressembler de plus en plus à une somme de Riemann (modulo un terme qui ne dépend que de N), et on obtient assez logiquement la formule (4.8) dans le cas continu.

La décroissance de l'entropie : un principe général. Considérons un système décrit par sa distribution $f(t, x, v)$ dans un état initial f^0 "peu probable", c'est-à-dire "ordonné", et donc avec une entropie grande que l'on laisse évoluer librement. Imaginons que la dynamique des particules sous-jacente les fassent évoluer dans tous les états possibles de manière un peu près uniforme. Si cette hypothèse est vraie, les particules vont passer beaucoup plus de temps dans les états très probables (désordonnés) que dans les états probables (ordonnés). Et le temps que $f(t)$ va passer proche d'un état g donné sera proportionnel à $e^{-NH(g)}$. Or dans tous les cas physiquement intéressants, N est très grand (de 10^{10} à 10^{23}), et donc la moindre différence dans l'entropie de deux états g_1 et g_2 donne des temps d'occupation très différents. En pratique, seul les états où l'entropie est minimale vont être occupée, les autres le seront très rarement. Pour ce raisonnement, nous avons fait beaucoup d'hypothèses difficiles à vérifier, mais l'idée que les systèmes isolés (sans action extérieure) tendent à se rapprocher des états désordonnés, avec petite entropie est très importante et s'observe effectivement en pratique. C'est le fameux second principe de la thermodynamique énoncé par Carnot en 1824 qui dit que l'entropie physique d'un système isolé ne peut qu'augmenter (au sens large). Et donc aussi que son entropie mathématique ne peut que diminuer.

4.6 Convergence vers l'équilibre pour les opérateurs de collisions.

Décroissance de l'entropie dans les opérateurs de collision. Considérons une solution $f(t, x, v)$ régulière (pour simplifier) de l'équation de Boltzmann (ou Vlasov-Boltzmann)

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x) \cdot \nabla_v f = Q_B(f, f).$$

On peut se demander comment évolue son entropie. La dérivé de $x \ln x$ étant $\ln x + 1$, on multiplie l'équation ci dessus par $(\ln f - 1)$ et on intègre ensuite en (x, v) . Le premier terme donne exactement $\partial_t H[f(t)]$. Le second et le troisième s'annulent à condition que f décroisse assez vite à l'infini (pour les mêmes raisons que dans le troisième chapitre). En effet, on obtient par exemple

$$\iint (v \cdot \nabla_x f)(\ln f + 1) dx dv = \iint v \cdot \nabla_x (f \ln f) dx dv = \int_v v \cdot \left(\int_x \nabla_x (f \ln f) dx \right) dv = 0,$$

pour le second terme. Pour le terme de collisions $Q_B(f, f)$, on peut écrire sa contribution

$$\begin{aligned} & \iint Q_B(f, f)(t, x, v) [\ln f(t, x, v) + 1] dx dv \\ &= \iiint \iiint (f_* f'_* - f f') [\ln f + 1] B(|v - v'|, \theta) dx dv dv' d\theta \\ &= \iiint \iiint (f_* f'_* - f f') \ln f B(|v - v'|, \theta) dx dv dv' d\theta \\ &= \frac{1}{2} \iiint \iiint (f_* f'_* - f f') \ln(f f') B(|v - v'|, \theta) dx dv dv' d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \iiint \iiint (f_* f'_* - f f') \ln\left(\frac{f_* f'_*}{f f'}\right) f f' B(|v - v'|, \theta) dx dv dv' d\theta \\ &=: -D_B[F(t)] \end{aligned}$$

Pour écrire la troisième ligne, on utilise que les collisions préservent la masse totale. Pour écrire la quatrième, on utilise le changement de variables $(v, v', \theta) \mapsto (v', v, -\theta)$ pour une moitié de l'intégrale, et pour la cinquième le changement de variable $(v, v', \theta) \mapsto (v_*, v'_*, -\theta)$ toujours sur la moitié de l'intégrale. La dernière expression est importante, car le terme est forcément négatif. En effet, la fonction $(x, y) \mapsto g(x, y) := (x - y) \ln(x/y)$ est positive au sens large (à vérifier). Le terme $D_B[f(t)]$ défini ainsi est donc positif et est appelé *dissipation d'entropie* pour l'équation de Boltzmann.

4.7 Les états d'équilibres.

Un état d'équilibre f_{eq} doit forcément vérifier $D_B[f_{eq}] = 0$. Comme le terme sous l'intégrale dans la définition de D_B est positif, l'intégrale ne peut s'annuler que si l'intégrande est nul partout. Comme dans les cas intéressants, on a $B(r, \theta) > 0$ pour tout r et θ , et comme la fonction g ne s'annule que pour $x = y$, on doit avoir pour tout v, v', θ

$$f_{eq}(v)f_{eq}(v') = f_{eq}(v_*)f_{eq}(v'_*).$$

On peut ensuite montrer, voir par exemple ^[CIP][Chapitre 3], que cela implique que f_{eq} est forcément de la forme

$$f_{eq}(v) = e^{A+B \cdot v + C|v|^2}, \quad \text{avec } A, C \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}^d$$

Pour obtenir une densité dont l'intégrale converge, il faut nécessairement que $C > 0$. Dans ce cas, on réécrit plus naturellement l'équilibre en fonction de sa densité ρ , sa vitesse moyenne u et sa température T sous la forme

$$f_{eq}(v) = M_{\rho, u, T}(v) := \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2}}.$$

Les distributions du type de M sont appelées *Maxwelliennes*. L'intérêt est de l'écriture $M_{\rho, u, T}$ est que la densité, vitesse moyenne et température sont des quantités physiques importantes, définies en général par

$$\rho := \int f_{eq}(v) dv, \quad \rho u := \int f_{eq}(v)v dv, \quad \frac{3}{2}\rho T := \int f_{eq}(v) \frac{|v-u|^2}{2} dv,$$

et que donc ici la forme de la distribution est donnée en fonction des paramètres importants (alors que les A, B, C précédents ont peu de sens physique). On vérifiera que si l'on remplace f_{eq} par $M_{\rho, u, T}$ dans les intégrales précédentes, on obtient bien ce qu'il faut.

4.8 Propositions d'exercices.

1. Écrire l'opérateur de collision dans le cas où B est constant égal à 1. Si on note $M_1(v) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|v|^2/2}$, écrire l'opérateur linéarisé de Boltzmann autour de M_1 dans ce cas, qui est défini par

$$Q_{LB}(f) := Q_B(f, M_1).$$

2. Soit v, v' dans \mathbb{R}^d tels que $|v| = |v'| = 1$. On suppose que deux particules de vitesses v et v' entrent en collision. Parmi toutes les vitesses post-collisionnelles v_*, v'_* possibles, y en a-t-il telles que $|v_*| = |v'_*|$? Si oui, lesquelles?

5 Le niveau macroscopique : les modèles fluides.

A compléter.

5.1 Propositions d'exercices

Les premiers exercices reprennent en partie ce qu'on a vu en cours.

1. En partant d'une solution de l'équation de Vlasov, écrire les équations vérifiées par sa densité, le courant $j = \int f v dv = \rho u$ (Attention, celle sur j fait intervenir le tenseur de pression définit par

$$P_{i,j} := \int f(v_i - u_i)(v_j - u_j) dv.$$

2. En déduire une équation vérifiée par la vitesse moyenne u associée.
3. Quel est le tenseur de pression $P = (P_{i,j})_{i,j}$ associé à la Maxwellienne $M_{\rho,u,T}$? Donner la nouvelle forme de l'équation sur j (et u) si le tenseur P a cette forme particulière.
4. (dur, dur) Essayer d'obtenir l'équation de la température T , qui doit faire intervenir un tenseur d'ordre trois

$$R_{i,j,k} := \int f(v_i - u_i)(v_j - u_j)(v_k - u_k) dv.$$

Que vaut ce tenseur dans le cas où la distribution f est Maxwellienne? Comment se simplifie l'équation obtenue?

6 Convergence des systèmes de particules vers Vlasov.

Définition 5 (Distance en variation totale et "Bounded Lipschitz"). Soient μ et ν deux probabilités sur \mathbb{R}^d . On définit la distance en variation totale par

$$\|\mu - \nu\|_{TV} := \sup_{\|\varphi\|_{\infty} \leq 1} \left(\int \varphi d\mu - \int \varphi d\nu \right).$$

Si de plus $\int |x| \mu(dx) + \int |x| \nu(dx) < \infty$, alors on peut définir la distance "bounded lipschitz" entre μ et ν par

$$d_{BL}(\mu, \nu) := \sup_{\|\nabla \varphi\|_{\infty} \leq 1} \left(\int \varphi d\mu - \int \varphi d\nu \right).$$

6.1 Propositions d'exercices

1. Vérifier que les deux définitions précédentes définissent bien des mesures.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 . On définit la mesure image $\mu_1 = \mu \circ \Phi^{-1}$ de μ par Φ de la façon suivante (avec la même chose pour ν) :

$$\forall A \text{ borélien de } \mathbb{R}^d, \quad \mu \circ \Phi^{-1}(A) = \mu[\Phi^{-1}(A)].$$

Montrer que cela implique que pour toute fonction φ régulière,

$$\int \varphi[\Phi(x)] \mu(dx) = \int \varphi(y) [\mu \circ \Phi^{-1}](dy) = \int \varphi(y) \mu_1(dy).$$

En déduire que

$$\|\mu_1 - \nu_1\|_{TV} \leq \|\mu - \nu\|_{TV}, \quad d_{BL}(\mu_1, \nu_1) \leq \|\nabla \Phi\|_{\infty} d_{BL}(\mu, \nu).$$

3. Dans la même idée, essayer de majorer $\|\mu_1 - \mu_2\|_{TV}$ et $d_{BL}(\mu_1, \mu_2)$ si $\mu_2 = \mu \circ \Psi^{-1}$, avec $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe C^1 (en fonction de la distance entre Ψ et Φ , estimée avec la bonne norme).
4. Est-ce que la définition ci-dessous est bien celle d'une distance ?

$$d_2(\mu, \nu) := \sup_{\|\nabla^2 \varphi\|_\infty \leq 3} \left(\int \varphi d\mu - \int \varphi d\nu \right).$$

Références

- CIP [1] C. CERCIGNANI, R. ILLNER, M. PULIVRENTI *The mathematical Theory of Dilute Gases*. Applied mathematical sciences, Springer 1994.