

Propagation du chaos pour des modèles de  
particules avec ou sans bruit

Samir SALEM

04 Septembre 2013

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction et généralités</b>                               | <b>2</b>  |
| 1.1      | Rappel de résultats importants . . . . .                         | 2         |
| 1.2      | Systèmes de particules et mesures empiriques . . . . .           | 3         |
| 1.2.1    | Quelques considérations physiques . . . . .                      | 3         |
| 1.2.2    | Système d'EDO et mesures empiriques . . . . .                    | 4         |
| 1.2.3    | Système d'EDS . . . . .  | 6         |
| 1.2.4    | Considérations historiques et problématiques . . . . .           | 9         |
| 1.3      | Rappels sur les espaces de mesures et leurs topologies . . . . . | 10        |
| 1.4      | Distances de Wasserstein . . . . .                               | 12        |
| <br>     |  |           |
| <b>2</b> | <b>Cas du champs de forces réguliers</b>                         | <b>23</b> |
| 2.1      | Cas sans bruit . . . . .   | 23        |
| 2.1.1    | Limite de champ moyen . . . . .                                  | 24        |
| 2.1.2    | Propagation du chaos . . . . .                                   | 37        |
| 2.2      | Cas avec bruit . . . . .   | 39        |
| 2.2.1    | Couplage . . . . .   | 39        |
| 2.2.2    | Estimation de déviation . . . . .                                | 45        |

# Chapitre 1

## Introduction et généralités

### 1.1 Rappel de résultats importants

Dans cette section on rappelle quelques résultats bien connus qui seront utiles dans la suite.

**Théorème 1.1.1** (Théorème d'Ascoli). *Soit  $(E, d)$  un espace métrique compact,  $(F, \delta)$  un espace métrique complet. Soit  $C(E, F)$  l'ensemble des fonctions continues de  $E$  dans  $F$ . Une partie  $A$  de  $C(E, F)$  est relativement compacte si et seulement si :*

- (a)  $\forall x \in E, \{f(x)\}_{f \in A}$  est relativement compacte dans  $F$
- (b)  $\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists V$  voisinage de  $x$  dans  $E$  tel que  $\forall f \in A \forall y \in V \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$

**Théorème 1.1.2** (Formule d'Itô). *Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{R}^+\}$  un processus d'Itô à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

*Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$  à dérivées bornées. La formule d'Itô assure que :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 ds$$

**Proposition 1.1.3.** *Soit  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé,  $B$  un mouvement brownien standard, et  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration induite par ce mouvement brownien. Soit  $\theta_t$  un processus adapté tel que  $\forall t > 0 \mathbb{E} \left( \int_0^t \theta_s^2 ds \right) < \infty$ . Alors :*

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right) = 0$$

**Lemme 1.1.4** (Lemme de Gronwall). *Soit  $u, \beta$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ ,  $\alpha$  localement intégrable. Si  $\beta$  est positive,  $\alpha$  croissante et que  $u$  vérifie une inégalité :*

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \in I$$

Alors  $\forall t \in T$

$$u(t) \leq \alpha(t)e^{\int_{t_0}^t \beta(s)ds}$$

## 1.2 Systèmes de particules et mesures empiriques

### 1.2.1 Quelques considérations physiques

On considère un système de  $N$  particules chargées identiques de masse  $m$  et de charge  $q$ . On désigne par  $(X_i^t, V_i^t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  la position et la vitesse de la  $i$ -ème particule au temps  $t$ , et par  $(X_i^0, V_i^0)$  sa position et sa vitesse initiale. On néglige l'action de la gravité et on considère que les particules sont uniquement soumises à l'action (de répulsion puisqu'elles sont toutes chargées de même signe) de Coulomb. On note  $\mathbf{F}(X_i^t - X_j^t)$  la force exercée par la  $j$ -ème particule sur la  $i$ -ème particule, donnée par :

$$\mathbf{F}(X_i^t - X_j^t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{X_i^t - X_j^t}{\|X_i^t - X_j^t\|^3} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \nabla\phi_c(X_i^t - X_j^t)$$

Où  $\phi_c$  est le potentiel coulombien donné par :

$$\phi_c(X) = \frac{1}{|X|}$$

L'évolution dynamique du système est dictée par la seconde loi de Newton :

$$\dot{X}_i^t = V_i^t$$

$$m\dot{V}_i^t = -\sum_{j \neq i} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \nabla\phi_c(X_i^t - X_j^t)$$

Introduisons maintenant  $L$  et  $T$  une taille et un temps caractéristiques du système, telle que  $\frac{L}{T}$  soit une vitesse caractéristique du système, par exemple la vitesse thermique définie par :

$$\frac{L}{T} = V_{th} = \sqrt{\frac{1}{3m} k_B T_{emp}}$$

Où  $T_{emp}$  est la température du système et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Introduisons les grandeurs adimensionnelles  $\widetilde{X}_i^t, \widetilde{V}_i^t, \tau$  telles que

$$\begin{aligned} X_i^t &= L\widetilde{X}_i^t \\ V_i^t &= V_{th}\widetilde{V}_i^t \\ t &= T\tau \end{aligned}$$

L'évolution du système de grandeurs adimensionnelles est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\widetilde{X}_i^t}{d\tau} = \frac{T}{L} \frac{dX_i^t}{dt} = \widetilde{V}_i^t \\ \frac{d\widetilde{V}_i^t}{d\tau} = \frac{T}{V_{th}} \frac{dV_i^t}{dt} = -\frac{q^2 T L}{m 4\pi \epsilon_0 V_{th} L^3} \sum_{i \neq j} \frac{(\widetilde{X}_i^t - \widetilde{X}_j^t)}{\|\widetilde{X}_i^t - \widetilde{X}_j^t\|^3} \end{array} \right.$$

On pose  $a$  le facteur adimensionnel qui apparaît.

$$a = \frac{q^2 T}{m L^2 4\pi \epsilon_0 V_{th}}$$

On considère maintenant le système  $(\overline{X}_i^t, \overline{V}_i^t) = \left( \widetilde{X}_i^{\frac{t}{\sqrt{Na}}}, \frac{1}{\sqrt{Na}} \widetilde{V}_i^{\frac{t}{\sqrt{Na}}} \right)$  c'est à dire que l'on change l'échelle de temps d'un facteur  $\frac{1}{\sqrt{Na}}$ . L'évolution de ce système est donné par le système d'EDO :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{X}}_i^t &= \frac{1}{\sqrt{Na}} \widetilde{V}_i^{\frac{t}{\sqrt{Na}}} = \overline{V}_i^t \\ \dot{\overline{V}}_i^t &= \frac{1}{\sqrt{Na}} \frac{1}{\sqrt{Na}} \dot{\widetilde{V}}_i^{\frac{t}{\sqrt{Na}}} = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla \phi_c(\overline{X}_i^t - \overline{X}_j^t) \end{aligned}$$

On est donc enclin, pour l'étude de ce problème physique, à considérer l'étude mathématique de ce système, notamment quand le nombre  $N$  de particules tend vers l'infini. De plus ce choix d'échelle de temps permet que la force reste d'ordre 1 indépendamment du nombre de particules.

### 1.2.2 Système d'EDO et mesures empiriques

On considère le système d'EDO sur  $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$

$$\begin{aligned} \dot{X}_i^t &= V_i^t \\ \dot{V}_i^t &= \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla K(X_i^t - X_j^t) \end{aligned}$$

Où  $K$  est le potentiel d'interaction.  $\nabla K$  est dans un premier temps lipschitzienne pour la commodité, mais qui est toujours impair (pour respecter le principe d'interaction réciproque) et vérifie toujours  $\nabla K(0) = 0$ . Les positions et vitesses initiales  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1..N} \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$  sont fixées. Le théorème de Cauchy Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale sur tout ouvert de  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$  et même d'une solution globale. On fixe  $T > 0$  et on considère la famille indexée par  $N$  des restrictions des solutions du système d'EDO sur  $[0, T] \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$  à laquelle on associe la famille des **mesures empiriques**  $(\mu_N^t)_{N \in \mathbb{N}}$  mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  définies par

$$\mu_N^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^t, V_i^t}$$

Où  $\delta$  désigne la masse de Dirac. On pose  $\mu_N^0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^0, V_i^0}$  la mesure empirique initiale. L'intérêt de ces mesures empiriques est donné par la proposition suivante

**Proposition 1.2.1.**  $(\mu_N^t)_{t \in [0, T]}$  est solution au sens des distributions de l'équation non linéaire de Vlasov :

$$\frac{\partial \mu_N^t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \mu_N^t + F(\mu_N^t) \nabla_v \mu_N^t = 0$$

pour la donnée initiale  $\mu_N^0$ .  $F(\mu)$  est donnée par :

$$F(\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla K(x - y) d\mu(y, w)$$

*Démonstration.* On commence par rappeler la définition d'être solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov.  $S([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  dénote l'ensemble des fonctions dans la classe de Schwartz sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  (i.e des fonctions infiniment dérivables sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  avec des dérivées à décroissance rapide).

$\forall \phi \in S([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ ,  $\forall t \in [0, T]$  on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu^t - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu^0 = \int_0^t \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\partial_t \phi + v \nabla_x \phi + F(\mu^s)(x) \nabla_v \phi) \mu^s(y, w) \right) ds$$

Dans la suite on utilisera la notation dualiste  $\langle \phi, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d\mu$ . Soit  $\phi \in S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  et  $\chi \in C_c^\infty([0, t])$ . On pose  $g(s) = \chi(s) \langle \phi, \mu_N^s \rangle$

$$g(t) - g(0) = \int_0^t g'(s) ds = \int_0^t \chi'(s) \langle \phi, \mu_N^s \rangle ds + \int_0^t \chi(s) \frac{d}{ds} \langle \phi, \mu_N^s \rangle$$

Mais

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \langle \phi, \mu_N^s \rangle &= \frac{d}{ds} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_i^s, V_i^s) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{X}_i^s \nabla_x \phi(X_i^s, V_i^s) + \dot{V}_i^s \nabla_v \phi(X_i^s, V_i^s) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^s \nabla_x \phi(X_i^s, V_i^s) + \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla K(X_i^s - X_j^s) \right) \nabla_v \phi(X_i^s, V_i^s)
\end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que  $(X_i^s, V_i^s)$  est solution du système d'EDO et le fait que  $\nabla K(0) = 0$  ce qui permet de remplacer indistinctement la sommation sur les  $j \neq i$  par une sommation des  $j = 1 \cdots N$ . Cette condition sur  $\nabla K$  s'appelle aussi condition de "non autointeraction" et signifie physiquement qu'une particule n'a pas d'action sur elle-même. En remarquant que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i^s \nabla_x \phi(X_i^s, V_i^s) &= \langle v \cdot \nabla_x \phi, \mu_N^s \rangle \\
\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla K(X_i^s - X_j^s) &= \langle \nabla K(X_i^s - y), \mu_N^s \rangle = F(\mu_N^s)(X_i^s) \\
\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla K(X_i^s - X_j^s) \right) \nabla_v \phi(X_i^s, V_i^s) &= \langle F(\mu_N^s)(x) \nabla_v \phi, \mu_N^s \rangle
\end{aligned}$$

Donc en conclusion :

$$\langle \chi(t) \phi, \mu_N^t \rangle - \langle \chi(0) \phi, \mu_N^0 \rangle = \int_0^t (\langle \chi' \phi, \mu_N^s \rangle + \langle v \cdot \nabla_x (\chi \phi), \mu_N^s \rangle + \langle F(\mu_N^s) \cdot \nabla_v (\chi \phi), \mu_N^s \rangle) ds$$

Par densité de l'espace engendré par les fonctions tensorisables (ie  $\psi(s, x, v) = \chi(s) \phi(x, v)$   $\chi \in C_c^\infty([0, t], t \in [0, T], \phi \in S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ ) dans  $S([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , on a bien que  $(\mu_N^t)_{t \in [0, T]}$  est solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov pour la donnée initiale  $\mu_N^0$ .

□

### 1.2.3 Système d'EDS

On considère maintenant le système d'EDS dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} dX_i^t = V_i^t dt \\ dV_i^t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_i^t - X_j^t) dt + \nu dB_i^t \end{cases}$$

pour la donnée initiale  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1 \dots N}$ . On note  $\mu_0^{(N)}$  la loi de ce vecteur aléatoire de dimension  $2dN$ . On suppose que cette loi est symétrique c'est à dire que  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1 \dots N}$  et  $(X_{\sigma(i)}^0, V_{\sigma(i)}^0)_{i=1 \dots N}$  ont la même loi où  $\sigma$  est une permutation  $\{1 \dots N\}$ . Par symétrie du système d'EDS, à tout temps  $t$  la loi  $\mu_t^{(N)}$  du vecteur  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N}$  est aussi symétrique. Notons donc  $Y^t = (X_1^t, \dots, X_N^t, V_1^t, \dots, V_N^t)$ ; ce vecteur est solution de l'EDS :

$$dY^t = (MY^t + G^N(Y^t))dt + \sigma dB^t$$

Avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M(\mathbb{R}^{2dN})$$

$$G^N(x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(x_1 - x_j) \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(x_N - x_j) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2dN}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu I \end{bmatrix}$$

On applique la formule d'Itô au processus  $Y$ . Soit  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^{2dN})$  on a :

$$f(Y^t) = f(Y^0) + \int_0^t \nabla f(Y^s) dY^s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma \sigma^t \Delta f(Y^s) ds$$

avec

$$\int_0^t \nabla f(Y^s) dY^s = \int_0^t \nabla f(Y^s) (MY^s + G^N(Y^s)) ds + \int_0^t \nabla f(Y^s) \sigma dB^t$$

Prenons l'espérance de cette équation. Par définition de la loi d'un vecteur aléatoire on a :

$$\mathbb{E}(f(Y^t)) = \int_{\mathbb{R}^{2dN}} f(y) d\mu_t^{(N)}$$

Ensuite,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \nabla f(Y^s) dY^s\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \nabla f(Y^s) (MY^s + G^N(Y^s)) ds\right)$$



car on a que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \nabla f(Y^s) \sigma dB^t\right) = 0$$

Mais encore par définition de la loi et par le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \nabla f(Y^s)(MY^s + G^N(Y^s)) ds\right) = \int_0^t \mathbb{E}(\nabla f(Y^s)(MY^s)) ds + \int_0^t \mathbb{E}(\nabla f(Y^s)G^N(Y^s)) ds$$

De même,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{2} \int_0^t \sigma \sigma^t \Delta f(Y^s) ds\right) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}(\sigma \sigma^t \Delta f(Y^s))\right) ds$$

Prenons  $f(x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N) = g(x_1, v_1)$  et notons  $\mu^t$  la loi du vecteur  $(X_1^t, V_1^t)$  sous  $\mu_t^{(N)}$  (par symétrie c'est la même que celle d'un vecteur  $(X_i^t, V_i^t)$   $i \neq 1$ ). On a donc

$$\int_0^t \mathbb{E}(\nabla_x g(X_1^s, V_1^s) MY^s) ds = \int_0^t \mathbb{E}(\nabla_x g(X_1^s, V_1^s) V_1^s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2d}} \nabla_x g(x_1, v_1) v_1 d\mu^s$$

et,

$$\int_0^t \mathbb{E}(\nabla_x g(X_1^s, V_1^s) G^N(Y^s)) ds = \int_0^t \mathbb{E}\left(\nabla_v g(X_1^s, V_1^s) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_1^s - X_j^s)\right)\right) ds$$

mais,

$$\mathbb{E}\left(\nabla_v g(X_1^s, V_1^s) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_1^s - X_j^s)\right)\right) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}(\nabla_v g(X_1^s, V_1^s) F(X_1^s - X_j^s))$$

Notons  $\mu_{(2)}^t$  la loi du vecteur  $(X_1^t, V_1^t, X_2^t, V_2^t)$ . Par symétrie c'est aussi la loi du vecteur  $(X_1^t, V_1^t, X_j^t, V_j^t)$  pour  $j \neq 1$ . Donc :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbb{E}(\nabla_v g(X_1^s, V_1^s) F(X_1^s - X_j^s)) = \frac{1}{N} N \int_{\mathbb{R}^{4d}} \nabla_v g(x_1, v_1) F(x_1 - x_2) d\mu_{(2)}^t$$

Finalement on a que

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} g d\mu^t = \int_{\mathbb{R}^{2d}} g d\mu^0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{2d}} v \cdot \nabla_x g d\mu^s ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{4d}} \nabla_v g F(x_1 - x_2) d\mu_{(2)}^s ds + \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \Delta_v g d\mu^s ds$$

Et donc on obtient l'équation au sens faible suivante qui lie  $\mu^t$  et  $\mu_{(2)}^t$

$$\frac{\partial \mu^t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \mu^t + \nabla_v (F \mu_{(2)}^t) = \frac{\nu^2}{2} \Delta_v \mu^t$$

On a une équation qui lie deux inconnues ce qui constitue un obstacle. Une condition suffisante pour avoir une seule inconnue est que les vecteurs  $(X_1^t, V_1^t)$  et  $(X_2^t, V_2^t)$  soient indépendants de sorte que  $\mu_{(2)}^t = \mu^t \otimes \mu^t$ . Cependant quand  $N$  est fixé les trajectoires des particules sont liées les unes les autres et n'ont pas de raison d'être indépendants. On verra que cette indépendance peut être obtenue sous certaines hypothèses quand le nombre de particules tend vers l'infinie.

#### 1.2.4 Considérations historiques et problématiques

L'appellation "équation de Vlasov" peut sembler étrange à la vue de la chronologie des travaux concernant la théorie cinétique comme il est souligné dans [10]. En 1915 le mathématicien et astronome anglais James Jeans propose le modèle suivant pour l'étude de la dynamique d'une galaxie :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

Où  $r$  et  $v$  désigne la position et la vitesse d'une étoile,  $f$  la fonction de distribution de l'ensemble des étoiles, et  $\psi$  est le potentiel gravitationnel. Il attire l'attention sur le fait qu'il s'agit d'un cas particulier de l'équation de Boltzmann sans opérateur de collisions. En 1938 le mathématicien russe Anatoly Vlasov présente un modèle identique pour décrire la dynamique d'un système de particules chargées interagissant via la loi de Coulomb. Aujourd'hui on appelle équation de Vlasov l'EDP non linéaire suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + \tilde{F}(f)(x) \cdot \nabla_v f = 0$$

Avec  $\tilde{F}(f)(x) = \int F(x - y) f(y, w)$  où  $F$  est une donnée du problème. A l'origine on entendait par équation de Vlasov ce qu'on appelle aujourd'hui équation de Vlasov-Poisson, c'est à dire que  $F$  dérive d'un potentiel  $K$  qui est solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta K = \rho(t, y) = \int f(t, y, w) dw$$

Ce qui est le cas lorsqu'on prend pour  $K$  le potentiel coulombien. On couple à l'équation de Vlasov une EDP supplémentaire. Le modèle de Vlasov-Poisson

est donc beaucoup plus compliqué mais aussi beaucoup plus réaliste physiquement que le modèle de "Vlasov simple".

À la fin des années 70, presque simultanément, Dobrushin, et Braun et Hepp ont prouvé l'existence et l'unicité de solution de cette équation en s'intéressant à la question suivante. On a vu dans la section précédente que la mesure empirique associée à un système de particules est toujours solution faible de l'équation de Vlasov pour la donnée initiale  $\mu_N^0$  la mesure empirique initiale. Si quand  $N \rightarrow \infty$   $\mu_N^0$  converge en un certain sens qu'il faudra définir vers une mesure de probabilité disons à densité  $f_0$ , que dire de la limite quand  $N \rightarrow \infty$  des  $\mu_N^t$  mesures empiriques au temps  $t$  par rapport à la solution de l'équation de Vlasov au temps  $t$  pour la donnée initiale  $f_0$ ,  $f(t)$ ? Si on arrive à montrer que  $f(t)$  peut s'interpréter comme la limite de ces mesures empiriques on parle de **limite de champ moyen** et cela apporte une justification supplémentaire que l'équation de Vlasov est une bonne modélisation pour les plasmas.

Une autre question que l'on peut être amené à se poser quand le nombre de particules tend vers l'infinie est celle de la **propagation du chaos** (on verra dans la partie consacrée ce que l'on entend précisément par ce terme). Cette question a été formalisée par le mathématicien Mark Kac en 1956. On dit d'une dynamique qu'elle propage le chaos si elle preserve à tout temps la caractéristique chaotique d'une distribution initiale. Le chaos est une notion probabiliste que l'on peut expliquer ainsi : si on considère comme des variables aléatoires la position et la vitesse initiales des particules, quand le nombre de ces particules tend vers l'infinie, ces variables aléatoires deviennent "indépendantes".

Dans la suite on introduira différentes notions qui permettent d'établir un formalisme pratique pour répondre à ces différentes questions.

### 1.3 Rappels sur les espaces de mesures et leurs topologies

**Définition 1.3.1.** *Un espace métrique  $(E, d)$  est polonais si et seulement s'il est complet et séparable (il admet un sous ensemble dénombrable dense dans lui même).*

**Définition 1.3.2.** *On appelle tribu des boréliens sur  $E$  la plus petite tribu (i.e une sous partie de  $P(E)$  contenant  $E$ , stable par passage au complémentaire et par intersection dénombrable) contenant tous les ouverts de  $E$ . On la note  $B_E$*

**Définition 1.3.3.** On notera  $M^+(E)$  l'ensemble des mesures boréliennes positives i.e des applications  $\mu$  de  $B_E$  dans  $\mathbb{R}^+$  telles que :

$$\mu(\emptyset) = 0$$

$$\forall (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \in B_E, \text{ deux à deux disjoints } \mu \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

On notera  $P(E) = \{\mu \in M^+(E), \mu(E) = 1\}$  (i.e l'ensemble des mesures de probabilités sur  $E$ )

**Définition 1.3.4.** On note  $M(E) = \{\mu, |\exists \mu^+, \mu^- \in M^+(E), \mu = \mu^+ - \mu^-\}$ . C'est un espace de banach pour la norme  $\|\cdot\|_{VT}$  la norme en variation totale définie par :

$$\|\mu\|_{VT} = \inf_{(\mu^+ - \mu^- = \mu)} (\mu^+(E) + \mu^-(E))$$

Soit maintenant  $\mu \in M(E)$  et l'application  $F_\mu$  définie par :

$$F_\mu : \phi \in C_b(E) \mapsto \int_E \phi d\mu$$

Où  $C_b(E)$  est l'ensemble des fonctions continues et bornées sur  $E$ .  $F_\mu$  est une forme linéaire sur  $C_b(E)$ , continue car  $\forall \phi \in C_b(E)$  on a :

$$|F_\mu(\phi)| \leq \|\phi\|_\infty \|\mu\|_{VT}$$

On peut donc voir  $\mu$  comme un élément du dual de  $C_b(E)$ . Munissons alors  $(C_b(E))'$  de la topologie faible \*, i.e la topologie la moins fine laissant continues les applications  $F_\phi : f \in (C_b(E))' \mapsto \langle f, \phi \rangle$ .

**Définition 1.3.5.** Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $M(E)$ . On dit qu'elle converge faible \* vers  $\mu \in M(E)$  si et seulement si

$$\forall \phi \in C_b(E), \int_E \phi d\mu_n \rightarrow \int_E \phi d\mu$$

On ne se contente pas de la notion de convergence au sens de la norme  $\|\cdot\|_{VT}$  pour la convergence de mesures associées à des systèmes de particules. En effet considérons  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente (non stagnante) vers  $x_0$ . La suite  $\delta_{x_n}$  des masses de Dirac centrées en  $x_n$  converge bien faiblement \* vers  $\delta_{x_0}$  (puisque  $\forall \phi$  continue  $\phi(x_n) \rightarrow \phi(x_0)$ ). Mais  $\|\delta_{x_n} - \delta_{x_0}\|_{VT} = \delta_{x_n}(E) + \delta_{x_0}(E) = 2$ . De plus on peut remarquer que la convergence en norme en variation totale implique la convergence faible \*, la notion de convergence en norme en variation totale est trop fine pour l'étude des systèmes de particules.

**Définition 1.3.6.** On dit qu'une famille de mesures sur  $E$   $(\mu_i)_{i \in I}$  est tendue si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \subset E \text{ compact t.q.}, \forall i \in I |\mu_i|(K^c) \leq \varepsilon$$

Où  $K^c$  est le complémentaire de  $K$  dans  $E$ , et  $|\mu|$  est la mesure en variation totale de  $\mu$  i.e  $|\mu|(A) = \inf_{(\mu^+ - \mu^- = \mu)} (\mu^+(A) + \mu^-(A))$

Lorsque l'on considère une famille de mesures de probabilités  $(\mu_i)_{i \in I}$  alors le critère de la tension s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \subset E \text{ compact t.q.}, \forall i \in I \mu_i(K) > 1 - \varepsilon$$

**Théorème 1.3.7** (Prokhorov). Soit  $(\mu_i)_{i \in I}$  une sous famille de  $P(E)$  avec  $E$  un espace polonais. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $(\mu_i)_{i \in I}$  est tendue
- (b)  $(\mu_i)_{i \in I}$  est relativement compacte pour la topologie faible \*

Ce théorème donne une caractérisation très pratique de la compacité faible \* sur l'espace des mesures de probabilités, et donc de la capacité à extraire des sous suites convergentes pour cette topologie qui sera utile par la suite. On conclut ces rappels sur les mesures par la notion importante de mesure image.

**Définition 1.3.8.** Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces polonais,  $\mu$  une probabilité borélienne sur  $X$  et  $T$  une application mesurable de  $X$  dans  $Y$  (i.e.  $\forall B \in B_Y T^{-1}(B) \in B_X$ ). On définit sur  $Y$  la mesure de probabilité  $\nu$  dite mesure image de  $\mu$  par  $T$  (ou "push-forward"), que l'on note  $\nu = T\#\mu$ , par :

$$\forall B \in B_Y, \nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

On trouvera aussi la notation probabiliste  $\nu = \mu \circ T^{-1}$

## 1.4 Distances de Wasserstein

Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces polonais et  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilités boréliennes sur  $X$  respectivement  $Y$ . On note  $\Pi(\mu, \nu)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $X \times Y$  de marginale  $\mu$  (resp.  $\nu$ ) sur  $X$  (resp.  $Y$ ) i.e.

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in P(X \times Y), \pi(A \times X) = \mu(A), \pi(Y \times B) = \nu(B)\}$$

Soit  $c$  une fonction positive mesurable sur  $X \times Y$ . Soit  $I^c$  la fonction sur  $\Pi(\mu, \nu)$  définie par :

$$I^c(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

**Définition 1.4.1** (Problème de transport de masse de Kantorovich). On appelle coût de transport optimal entre  $\mu$  et  $\nu$  note  $T_c(\mu, \nu)$

$$T_c(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} I^c(\pi) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

De plus on peut montrer que  $\Pi(\mu, \nu)$  est compact (pour la topologie faible \*) et que la fonctionnelle  $I^c$  est semi-continue inférieurement. Donc il existe toujours au moins un plan de transfert  $\pi$  réalisant le minimum appelé "plan de transfert optimal".

Commençons par justifier l'existence de cette quantité.  $\Pi(\mu, \nu)$  n'est jamais vide, en effet si l'on considère le produit tensoriel  $\mu \otimes \nu$  sur  $X \times Y$  il a bien  $\mu$  et  $\nu$  comme marginale sur  $X$  et  $Y$ . On peut remarquer que dans le cas où l'une des deux mesures de probabilités est une masse de Dirac, ce produit tensoriel est l'unique plan de transfert admissible.

En effet, notons  $\text{supp}(\mu)$  (resp  $\text{supp}(\nu)$ ) le plus petit fermé  $B$  de  $X$  (resp  $Y$ ) au sens de l'inclusion tel que  $\int_B d\mu(x) = 1$  (resp.  $\int_B d\nu(x) = 1$ ). Commençons par montrer que pour tout  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ ,  $\text{supp}(\pi) \subset \text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\nu)$ .

Soit  $A \in B_Y$

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(\mu) \times A} d\pi(x, y) &= \int_{X \times A} d\pi(x, y) - \int_{\text{supp}(\mu)^c \times A} d\pi(x, y) \\ &= \nu(A) - \int_{\text{supp}(\mu)^c \times A} d\pi(x, y) \end{aligned}$$

Mais

$$\int_{\text{supp}(\mu)^c \times A} d\pi(x, y) \leq \int_{\text{supp}(\mu)^c \times Y} d\pi(x, y) = \mu(\text{supp}(\mu)^c) = 0$$

Donc

$$\int_{\text{supp}(\mu) \times A} d\pi(x, y) = \nu(A)$$

Et finalement pour  $A = \text{supp}(\nu)$  on a :

$$\int_{\text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\nu)} d\pi(x, y) = 1$$

Et donc  $\text{supp}(\pi) \subset \text{supp}(\mu) \times \text{supp}(\nu)$ . Dans le cas où  $\mu = \delta_{x_0}$  on a que  $\text{supp}(\mu) = \{x_0\}$ . Montrons que dans ce cas  $\pi = \delta_{x_0} \otimes \nu$ . Pour cela on prend

$A \in B_Y$  et  $B \in B_X$  et on montre que  $\pi(B \times A) = \delta_{x_0}(B)\nu(A)$ .  
 Commençons par le cas ou  $x_0 \in B$ , on a :

$$\int_{B \times A} d\pi(x, y) \geq \int_{\{x_0\} \times A} d\pi(x, y) = \nu(A)$$

D'après le résultat ci dessus. D'un autre côté on a :

$$\int_{B \times A} d\pi(x, y) \leq \int_{X \times A} d\pi(x, y) = \nu(A)$$

Si  $x_0$  n'est pas dans  $B$ , on a directement :

$$\int_{B \times A} d\pi(x, y) \leq \int_{B \times Y} d\pi(x, y) = \delta_{x_0}(B) = 0$$

Donc on a bien  $\pi = \delta_{x_0} \otimes \nu$ .

Ensuite pour illustrer en quoi minimiser la fonction  $I^c(\pi)$  répond à un problème de transport optimal de masse, considérons que sur un espace  $X$  est placé un tas de sable de masse totale égale 1 et dont la répartition est donnée par une mesure  $\mu$ , et que l'on souhaite déplacer ce tas sur un espace  $Y$  selon une répartition de masse donnée par  $\nu$ . On modélise le plan de transfert par une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $X \times Y$ . On déplace tout le sable qui était réparti autour d'un point  $x \in X$ , c'est à dire  $\mu(dx)$ , dans  $Y$ . Le plan de transfert correspondant à cette action est  $\int_Y d\pi(x, y)$ . Réciproquement tout le sable réparti autour d'un point  $y \in Y$ , c'est à dire  $\nu(dy)$  correspond au plan de transfert  $\int_X d\pi(x, y)$ . Cela revient à dire que pour qu'un plan de transfert  $\pi$  soit admissible il faut qu'il admette  $\mu$  (resp  $\nu$ ) comme marginale sur  $X$  (resp.  $Y$ ). Introduisons maintenant une fonction de coût  $c(x, y)$  sur  $X \times Y$  qui modélise le coût du transport d'une unité de masse d'un point  $x$  vers un point  $y$ . Pour un plan de transfert  $\pi$  le coût de ce transfert est modélisé par  $\int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$  et minimiser  $I^c(\pi)$  revient bien à trouver le coût de transfert optimal.

Considérons un problème de transport de masses plus restrictif dans lequel on exige que la masse de sable prise autour d'un point  $x$  ne soit pas séparée en divers endroits de  $Y$ . En d'autres termes on souhaite que la masse  $d\mu(x)$  prélevée autour d'un point  $x \in X$  soit transférée autour d'un et un seul point  $y \in Y$  dépendant uniquement de  $x$ . Modélisons cette dépendance par une application (dite de transport) mesurable  $T : X \rightarrow Y$ . La masse de sable alors localisée autour de  $y$  est égale à la somme des masses localisées autour des points  $x$  tels que  $T(x) = y$ . On a donc :

$$\nu(dy) = \int_X 1_{T^{-1}(y)}(x) d\mu(x) = d(\mu \# T)(y)$$

Pour qu'une application de transport soit donc admissible, il faut que qu'il existe une application de transport telle que  $\nu = T \# \mu$ . Et l'on souhaite donc minimiser la fonction  $I^c$  définie sur l'ensemble des applications mesurables de  $X$  dans  $Y$  par :

$$I^c(T) = \int_{X \times Y} c(x, T(x)) d\pi(x, y) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

sur l'ensemble des  $T$  tels que  $\nu = \mu \# T$ . Ce problème est le problème de Monge et est une version plus forte du problème de Kantorovich. En effet en général il peut ne pas exister d'application de transport de  $\mu$  sur  $\nu$  (Si  $\mu$  est une masse de Dirac et  $\nu$  une somme de deux masses de Diracs par exemple). Cependant on peut dire en toute généralité que :

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) \leq \inf_{T | \nu = T \# \mu} \int_{X \times Y} c(x, T(x)) d\mu(x)$$

C'est à dire que l'infimum du problème de Kantorovich est toujours inférieur à l'infimum du problème de Monge. En effet à toute application de transport  $T$  on peut associer un plan de transfert  $\pi_T(x, y) = \mu \otimes \delta_{y=T(x)}$ ,  $\pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$ . Ce que l'on peut aussi affirmer c'est que si un plan de transfert  $\pi_T$  associé à une application de transfert  $T$  réalise l'infimum pour le problème de Kantorovich, alors  $T$  réalise l'infimum pour le problème de Monge et les infimums coïncident. On peut ajouter que quand  $X = Y = \mathbb{R}^n$  l'existence de plans de transfert réalisant l'infimum est assurée dès que  $c(x, y) = |x - y|$  ou  $|\cdot|$  est la norme euclidienne. De plus quand  $\mu$  est **absolument continue** par rapport à la mesure de Lebesgue (i.e  $\mu(A) = 0$  si  $\lambda(A) = 0$ ,  $A$  borélien), il existe un plan de transfert associé à **une application de transfert** réalisant l'infimum du problème de Kantorovich. On peut conclure à l'unicité quand la fonction de coût est strictement convexe. On ne rentrera pas dans ces considérations, car seule l'existence nous sera utile. On retiendra donc que quand  $\mu$  est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , et  $\nu$  une autre mesure, on peut caractériser l'infimum du problème de Kantorovich par une application de transport. On a par ailleurs une autre caractérisation dans un cadre plus général qui est donnée par la dualité Kantorovich-Rubinstein.

**Théorème 1.4.2** (Dualité de Kantorovich). *On définit la fonction  $J$  sur*



$L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$  par

$$J(\phi, \psi) = \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu$$

On pose  $\Phi_c = \{(\phi, \psi) \in L^1(d\mu) \times L^1(d\nu) \mid \phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)\}$ . La dualité de Kantorovich assure que :

$$T_c(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} I^c(\pi) = \sup_{(\phi, \psi) \in \Phi_c} J$$

On suppose maintenant  $\mu$  et  $\nu$  sont deux mesures de probabilités sur le même espace polonais  $X$  et que la fonction de coût  $c(x, y)$  est une distance sur  $X$  (on utilisera donc la notation  $d$ )

**Théorème 1.4.3** (Kantorovich-Rubinstein).

$$T_d(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_X \phi d(\mu - \nu) = \int_X \phi d\mu - \int_X \phi d\nu, \|\phi\|_{Lip} \leq 1 \right\}$$

Avec

$$\|\phi\|_{Lip} = \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)}$$

On a donc une caractérisation supplémentaire du coût de transport optimale entre deux mesures de probabilités. A l'aide de cette quantité on va définir les distances de Wasserstein ou de Monge-Kantorovich. Soit  $X$  un espace polonais,  $d$  une distance sur  $X$  et  $p \geq 0$ . On note  $P_p(X)$  l'ensemble des mesures de probabilités admettant un moment d'ordre  $p$  i.e des  $\mu$  telles que pour un  $x_0 \in X$  (et donc pour tous)

$$\int_X d(x, x_0)^p d\mu(x) < +\infty$$

**Définition 1.4.4** (Distance de Wasserstein ou de Monge-Kantorovich). Soit  $\mu, \nu \in P_p(X)$  on définit la distance de Wasserstein  $W_p$  d'ordre  $p$  par

$$W_p(\mu, \nu) = (T_{d^p}(\mu, \nu))^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p \geq 1$$

$$W_p(\mu, \nu) = (T_{d^p}(\mu, \nu)), \text{ si } p < 1$$

On ne redémontrera pas ici le fait que  $W_p$  est une distance sur  $P_p(X)$  (on pourra trouver la preuve dans [1]). Les appellations et les orthographe varient beaucoup d'un article à l'autre quant à cette distance. Dans la suite on sera plus enclin de parler de distance de Wasserstein aux vues de la notation  $W_p$ . Dans le cas  $p = 1$  on parle aussi de distance de Kantorovich-Rubinstein ou Bounded Lipschitz par rapport au théorème précédent. On peut exhiber les quelques propriétés élémentaires sur les distances  $W_p$

**Proposition 1.4.5.** *On a les quelques propriétés élémentaires sur les distances de Wasserstein : (1) Soit  $p \geq p' \geq 1$ , alors  $W_p(\mu, \nu) \geq W_{p'}(\mu, \nu)$*

(2) Soit  $x, y \in X$  on a :

$$W_p(\delta_x, \delta_y) = d(x, y)^{\min(1, p)}$$

*Démonstration.* (1) Commençons par rappeler que comme  $p \geq p'$  par l'inégalité de Hodler on a :

$$\int_{X^2} d^{p'}(x, y) d\pi(x, y) \leq \left( \int_{X^2} d^{p' \frac{p}{p'}}(x, y) d\pi(x, y) \right)^{\frac{p'}{p}}$$

On a donc

$$\begin{aligned} W_{p'}(\mu, \nu)^{p'} &= T_{d^{p'}}(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X^2} d^{p'}(x, y) d\pi(x, y) \\ &\leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \left( \int_{X^2} d^{p' \frac{p}{p'}}(x, y) d\pi(x, y) \right)^{\frac{p'}{p}} \\ &\leq \left( \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X^2} d^{p' \frac{p}{p'}}(x, y) d\pi(x, y) \right)^{\frac{p'}{p}} \\ &= W_p(\mu, \nu)^{p'} \end{aligned}$$

(2)

$$T_{d^p}(\delta_x, \delta_y) = \sup_{\|\phi\|_{Lip^p(X)} \leq 1} \left( \int_X \phi d(\delta_x - \delta_y) \right)$$

Avec

$$Lip^p(X) = \left\{ \phi \mid \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d^p(x, y)} \leq 1 \right\}$$

Donc  $\forall \phi \in Lip^p(X)$

$$\int_X \phi d(\delta_x - \delta_y) = \phi(x) - \phi(y) \leq d^p(x, y)$$

Donc

$$T_{d^p}(\delta_x, \delta_y) \leq d^p(x, y)$$

De plus, il existe  $\phi_0 \in Lip^p(X)$  telle que  $\phi_0(x) - \phi_0(y) = d^p(x, y)$  donc

$$T_{d^p}(\delta_x, \delta_y) \geq d^p(x, y)$$

Donc si  $p \geq 1$   $W_p(\delta_x, \delta_y) = (T_{d^p}(\delta_x, \delta_y))^{\frac{1}{p}} = d(x, y)$ , si  $p \leq 1$   $W_p(\delta_x, \delta_y) = T_{d^p}(\delta_x, \delta_y) = d^p(x, y)$ .  $\square$

**Théorème 1.4.6** ( $W_p$  métrise la convergence faible \*). Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $P_p(X)$  (i.e.  $\int_X d(x, x_0)^p d\mu_n(x) < \infty$  pour  $\forall x_0 \in X$ ) et  $\mu \in P_p(X)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$
- (2)  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  et  $\int_X d(x, x_0)^p d\mu_n(x) \rightarrow \int_X d(x, x_0)^p d\mu(x)$

*Démonstration.* On se contente de le démontrer dans le cas où  $d$  est issue d'une norme sur  $X$  espace vectoriel de dimension finie et  $p = 1$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2)

On rappelle que par la dualité de Kantorovich-Rubinstein on a que :

$$W_1(\mu, \nu) = \sup_{\phi \in Lip(X)} \int_X \phi d(\mu - \nu)$$

Comme  $\forall n \in \mathbb{N} \mu_n \in P_1(X)$ ,  $\int_X |x| d\mu_n(x)$  existe et comme  $x \mapsto |x|$  est 1-lipschitz on a que

$$\int_X |x| d\mu_n(x) \rightarrow \int_X |x| d\mu(x)$$

Puisqu'on a supposé  $X$  de dimension finie il est localement compact donc on peut se contenter de prendre des fonctions tests continues nulles à l'infinie (cf [?]). Soit  $\phi \in C_0(X)$  (i.e.  $\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon$  compact de  $X$  tel que  $\sup_{x \notin K_\varepsilon} |\phi(x)| \leq \varepsilon$ ), et  $\varepsilon > 0$  fixe. Comme  $\phi$  est continue il existe une suite de fonctions lipschitziennes  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

- $\phi_n$  converge uniformement vers  $\phi$  sur  $K_\varepsilon$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \notin K_\varepsilon} |\phi_n(x)| \leq \varepsilon$
- $\exists C > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|\phi_n\|_{Lip} \leq C$

De plus on a :

$$\left| \int_X \phi d\mu_k - \int_X \phi d\mu \right| \leq \left| \int \phi d\mu_k - \int \phi_n d\mu_k \right| + \left| \int \phi_n d\mu_k - \int \phi_n d\mu \right| + \left| \int \phi_n d\mu - \int \phi d\mu \right|$$

Traisons le premier et le dernier terme. Soit  $\nu \in P_1(X)$

$$\begin{aligned} \left| \int_X \phi d\nu - \int_X \phi_n d\nu \right| &\leq \left| \int_{K_\varepsilon} (\phi - \phi_n) d\nu \right| + \left| \int_{K_\varepsilon^c} (\phi - \phi_n) d\nu \right| \\ &\leq \|\phi - \phi_n\|_{L^\infty(K_\varepsilon)} + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Et pour  $n$  assez grand on a  $\|\phi - \phi_n\|_{L^\infty(K_\varepsilon)} \leq \varepsilon$ , donc  $|\int_X \phi d\nu - \int_X \phi_n d\nu| \leq 3\varepsilon$  (indépendemment de la mesure de probabilité  $\nu$  choisie). Traitons le deuxieme terme.

$$\left| \int \phi_n d\mu_k - \int \phi_n d\mu \right| \leq \|\phi_n\|_{Lip} \left| \int \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{Lip}} d(\mu_k - \mu) \right| \leq CW_1(\mu_k, \mu)$$

Car  $\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_{Lip}}$  est 1-lipschitzienne. Donc comme  $W_1(\mu_k, \mu) \rightarrow 0$  pour  $k$  assez grand on a  $|\int \phi_n d\mu_k - \int \phi_n d\mu| \leq \varepsilon$ . Au final on a pour  $k$  assez grand

$$\left| \int_X \phi d\mu_k - \int_X \phi d\mu \right| \leq 7\varepsilon$$

i.e  $\mu_k \rightharpoonup \mu$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Soit  $\phi \in Lip(X)$  telle que  $\phi(0) = 0$  et  $\chi_R$  la fonction définie par :

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq R \\ R + 1 - |x|, & \text{si } |x| \in [R, R + 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\int_X \phi d(\mu_n - \mu) = \int \phi \chi_R d(\mu_n - \mu) + \int \phi(1 - \chi_R) d(\mu_n - \mu)$$

On remarque que comme  $\mu_n$  et  $\mu$  sont deux mesures de probabilités, en considérant  $\tilde{\phi} = \phi - \phi(0)$  on peut toujours se rapporter au cas  $\phi(0) = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  fixé

Commençons par traiter le second terme. Comme  $\phi$  est 1-lipschitzienne et que  $\phi(0) = 0$  on a que pour tout  $x \in X$ ,  $|\phi(x)| \leq |x|$  et donc

$$\begin{aligned} \left| \int \phi(1 - \chi_R) d(\mu_n - \mu) \right| &\leq \int |\phi|(1 - \chi_R) d\mu_n + \int |\phi|(1 - \chi_R) d\mu \\ &\leq \int |x|(1 - \chi_R) d\mu_n + \int |x|(1 - \chi_R) d\mu \end{aligned}$$

Mais  $x \mapsto |x|\chi_R(x)$  est continue à support compact donc continue bornée donc par la définition de la convergence faible \* on a :

$$\int |x|\chi_R(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int |x|\chi_R(x) d\mu(x)$$

Mais comme par hypothèse on a :

$$\int |x|d\mu_n(x) \rightarrow \int |x|d\mu(x)$$

On a :

$$\int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu_n(x) \rightarrow \int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu(x)$$

Mais  $\mu \in P_1(X)$  donc pour  $R$  assez grand, disons  $R \geq R_\varepsilon$  on a :

$$\int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu(x) \leq \varepsilon$$

On fixe désormais  $R \geq R_\varepsilon$ . Comme  $\int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu_n(x) \rightarrow \int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu(x)$  il existe  $N_\varepsilon$  (qui dépend également de  $R$  mais comme celui ci à été fixé on omet de le faire apparaître dans les notations) tels que  $\forall n \geq N_\varepsilon$  on a :

$$\int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu_n(x) \leq \int |x|(1 - \chi_R)(x)d\mu(x) + \varepsilon$$

D'où pour  $R \geq R_\varepsilon$  et  $n \geq N_\varepsilon$  on a :

$$\left| \int \phi(1 - \chi_R)d(\mu_n - \mu) \right| \leq 2\varepsilon$$

Traitions maintenant le premier terme. Posons

$$A_R = \left\{ \phi \text{ lipschitz. } | \text{supp}(\phi) \subset B(0, R + 1), \|\phi\|_{Lip} \leq R + 2, \phi(0) = 0 \right\},$$

Alors par le théorème d'Ascoli,  $A_R$  est relativement compact.  $A_R$  est équicontinue, en effet soit  $\phi \in A_R$  et  $x, y \in B(0, R + 1)$

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq (R + 2)|x - y|,$$

De plus  $A_R$  est "ponctuellement compact", en effet soit  $x \in B(0, R + 1)$  et  $\phi \in A_R$  :

$$|\phi(x)| = |\phi(x) - \phi(0)| \leq (R + 2)(R + 1),$$

Donc  $\{\phi(x)\}_{\phi \in A_R}$  est borné donc compact.  $A_R$  est donc relativement compact donc précompact et il existe  $(\phi_i)_{i=1 \dots p_\varepsilon} \in A_R$  tel que :

$$A_R \subset \bigcup_{i=1}^{p_\varepsilon} B(\phi_i, \varepsilon)$$

(les boules ci dessus sont entendues au sens de la norme infinie). La famille  $(\phi_1 \cdots \phi_{p_\varepsilon})$  dépend également de  $R$  mais encore une fois comme celui ci est fixé, on ne le fait pas apparaitre dans les notations. Pour toute fonction  $\phi \in Lip(X)$  avec  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi\chi_R \in A_R$  en effet  $supp(\phi\chi_R) \subset B(0, R+1)$  et de plus :

$$\begin{aligned} \|\phi\chi_R\|_{Lip} &\leq \|\phi\|_\infty \|\chi_R\|_{Lip} + \|\phi\|_{Lip} \|\chi_R\|_\infty \\ &\leq R + 2 \end{aligned}$$

Alors il existe  $i \in \{1, \dots, p_\varepsilon\}$  tel que

$$\|\phi\chi_R - \phi_i\|_\infty \leq \varepsilon$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \int \phi\chi_R d(\mu_n - \mu) \right| &\leq \left| \int \phi_i d(\mu_n - \mu) \right| + \left| \int (\phi\chi_R - \phi_i) d\mu_n \right| + \left| \int (\phi\chi_R - \phi_i) d\mu \right| \\ &\leq \sup_{\phi \in Lip(X)} \left| \int \phi\chi_R d(\mu_n - \mu) \right| + \sup_{j=1 \cdots p_\varepsilon} \left| \int \phi_j d(\mu_n - \mu) \right| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Mais pour tout  $j = 1 \cdots p_\varepsilon$ ,  $\phi_j$  est lipschtzienne à support compact donc continue bornée. Donc par définition de la convergence faible \* de  $\mu_n$  vers  $\mu$ , pour tout  $j = 1 \cdots p_\varepsilon$ , il existe  $N_\varepsilon^j$  tel que pour  $n \geq N_\varepsilon^j$

$$\left| \int \phi_j d(\mu_n - \mu) \right| \leq \varepsilon$$

Donc pour  $n \geq M_\varepsilon = \max_{j=1 \cdots p_\varepsilon} N_\varepsilon^j$  on a

$$\left| \int \phi\chi_R d(\mu_n - \mu) \right| \leq 3\varepsilon$$

En conclusion pour  $n \geq \max(M_\varepsilon, N_\varepsilon)$  on a

$$\left| \int \phi d(\mu_n - \mu) \right| \leq 5\varepsilon$$

Quelque soit  $\phi \in Lip(X)$ ,  $\phi(0) = 0$ . En se rappelant qu'on peut toujours se ramener au cas  $\phi(0) = 0$ , le résultat est prouvé pour toute fonction  $\phi \in Lip(x)$  et donc pour  $n \geq \max(M_\varepsilon, N_\varepsilon)$

$$W_1(\mu_n, \mu) = \sup_{\phi \in Lip(X)} \left| \int \phi d(\mu_n - \mu) \right| \leq 5\varepsilon$$

i.e.  $W_1(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$

□

On a ainsi une distance qui permet d'avoir une caractérisation pratique de la convergence faible \*, qui on l'a vu, est le type de convergence dans l'espace des mesures adaptée aux convergences de systèmes de particules. On ajoute que  $P_p(X)$  munit de la distance  $W_p$  est un espace polonais. Par le même procédé on peut munir  $P_p(P_p(X))$  d'une métrique issue de  $W_p$ . Dans la suite on utilisera les notions introduites dans ce chapitre pour répondre aux problématiques de limite de champ moyen et de propagation du chaos.

## Chapitre 2

# Cas du champs de forces réguliers

### 2.1 Cas sans bruit

On considère le système d'EDO sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  suivant

$$\begin{cases} \frac{dX_i^t}{dt} = V_i^t \\ \frac{dV_i^t}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_i^t - X_j^t) \end{cases}$$

avec condition initiale  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1 \dots N} \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)^N$ . On suppose que la force d'interaction entre les particules  $F$  globalement lipschitzienne (comme dans tout le reste de ce chapitre) de sorte que le système d'EDO ci dessus admette une unique solution sur un intervalles  $[0, T]$ . On introduit la famille des mesures empiriques  $(\mu_N^t)_{t \in [0, T]}$  associée au système de particules définies par :

$$\mu_N^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_i^t, V_i^t)}$$

Le but de ce chapitre est de montrer que si les mesures empiriques initiales  $\mu_N^0$  convergent vers une certaine mesure  $\mu^0$  quand le nombre de particules tend vers l'infinie, alors pour tout temps  $t$  les mesures empiriques  $\mu_N^t$  convergent vers la solution au sens faible de l'équation de Vlasov pour la donnée initiale  $\mu^0$ . Bien entendu il sera nécessaire de s'interroger sur l'existence et l'unicité d'une pareille solution. D'autre part on peut aussi s'interroger sur la notion de convergence à utiliser dans l'espace des mesures. On a vu dans le chapitre



suivant qu'on a deux notions de convergence susceptibles d'être exploitées dans ce cadre : la convergence faible \*, et la convergence en distance de Wasserstein (qui ne sont pas strictement équivalentes dans le cas générale, la convergence en distance de Wasserstein impliquant toujours la convergence faible \*). Notre but est donc de prouver dans un premier temps :

$\mu_N^0 \rightharpoonup \mu^0 \Rightarrow \forall t \in [0, T], \mu_N^t \rightharpoonup \mu^t$  où  $(\mu^t)$  est la solution de l'équation de Vlasov au temps  $t$  pour la donnée initiale  $\mu^0$

Puis dans un second temps un résultat plus général de stabilité (avec en plus la vitesse de convergence) :

$$W_1(\mu_N^0, \mu^0) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall t \in [0, T] W_1(\mu_N^t, \mu^t) \rightarrow 0$$

### 2.1.1 Limite de champ moyen

#### Par compacité

Une première idée pour prouver la limite de champ moyen peut s'appuyer sur le théorème de Prokhorov. En effet si l'on était en mesure d'extraire de la suite des mesures empiriques une sous suite convergente quand le nombre de particules tend vers l'infinie, ce qui peut être obtenu par le critère de la tension, alors, si l'espace des solutions de Vlasov est fermé, par passage à la limite cette sous suite convergerait vers une solution de l'équation de Vlasov puisque toute mesure empirique l'est. Cependant dans cette démarche on doit s'interroger sur l'unicité au sens des mesures de solution à l'équation de Vlasov. Dans la partie suivante on donnera la preuve classique de limite de champs moyen qui assure l'unicité des solutions de l'équation de Vlasov.

Dans un premier temps on a le résultat d'unicité de solution faible à l'équation de Vlasov :

**Théorème 2.1.1.** *On suppose que  $F$  est globalement lipschitz sur  $\mathbb{R}^d$ . L'équation de Vlasov :*

$$\frac{\partial \mu^t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \mu^t + \tilde{F}(\mu^t) \nabla_v \mu^t = 0$$

Avec  $\tilde{F}(\mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - y) d\mu(y, w)$ , admet une unique solution sur  $[0, T]$  pour la donnée initiale  $\mu_0 \in P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ .

*Démonstration.* On considère l'EDO dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  :

$$\frac{d}{dt}(x(t), v(t)) = \xi(v)(t, x(t), v(t)) \quad (x(0), v(0)) = (x_0, v_0)$$

Ou  $\nu. \in C([0, T], P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  et

$$\xi(\nu.)(t, x, v) = (v, \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - y) d\nu_t(y, w))$$

Comme  $\nu. \in C([0, T], P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  et  $F$  est lipschitzienne,  $\xi(\nu.)$  est continue en  $t$ , et comme  $F$  est lipschitzienne, elle est lipschitzienne en  $(x, v)$  de constante de lipschitz plus petite que  $\max(1, \|F\|_{Lip})$ . On admet que sous ces conditions (cf [6]), cette EDO admet une unique solution donnée par

$$(x(t), v(t)) = T_t(\nu.)(x_0, v_0)$$

Avec  $T_t(\nu.)$  est la caractéristique associée à la précédente EDO. C'est une bijection de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  dans lui même. On admet de plus que l'EDP linéaire :

$$\frac{\partial \mu^t}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \mu^t + \tilde{F}(\nu^t) \nabla_v \mu^t = 0$$

Admet une unique solution au sens des distributions pour la donnée initiale  $\mu_0 \in P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$  qui est donnée par  $\mu_t = \mu_0 \# T_t(\nu.)$

Considérons l'application  $\Theta$  de  $C([0, T], P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}))$  dans lui même qui à  $(\nu_t)_{t \in [0, T]}$  associe l'unique solution au sens des distributions de l'EDP précédente pour la donnée initiale  $\mu_0$ .  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  est solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov si et seulement si c'est un point fixe de  $\Theta$ . Montrons donc que  $\Theta$  admet un unique point fixe.

$$\begin{aligned} W_1(\Theta \nu_t, \Theta \nu'_t) &= W_1(\mu_0 \circ T_t^{-1}(\nu.), \mu_0 \circ T_t^{-1}(\nu'_.)) \\ &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \phi d(\mu_0 \circ T_t^{-1}(\nu.) - \mu_0 \circ T_t^{-1}(\nu'_.)) \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}} \phi(T_t(\nu.)) - \phi(T_t(\nu'_.)) d\mu_0 \right| \\ &\leq \|T_t(\nu.) - T_t(\nu'_.)\|_\infty \end{aligned}$$

Mais pour tout  $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  on a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} |T_t(\nu)(x, v) - T_t(\nu')(x, v)| &\leq \left| \frac{d}{dt} T_t(\nu)(x, v) - \frac{d}{dt} T_t(\nu')(x, v) \right| \\
&= |\xi(\nu_t)(T_t(\nu_t)(x, v)) - V(\nu'_t)(T_t(\nu'_t)(x, v))| \\
&\leq |\xi(\nu_t)(T_t(\nu_t)(x, v)) - \xi(\nu_t)(T_t(\nu'_t)(x, v))| + |\xi(\nu_t)(T_t(\nu'_t)(x, v)) - \xi(\nu'_t)(T_t(\nu'_t)(x, v))| \\
&\leq L W_1(\nu_t, \nu'_t) + L |T_t(\nu_t)(x, v) - T_t(\nu'_t)(x, v)|
\end{aligned}$$

Où on a utilisé que  $\xi(\nu.)$  est lipschitzienne de constante plus petite que  $L = \max(1, \|F\|_{Lip})$ , (et donc que  $\|\xi(\nu.) - \xi(\nu'.)(t)\|_\infty \leq L W_1(\nu_t, \nu'_t)$ ).  
On a donc par un lemme de Gronwall :

$$|T_t(\mu_t)(x, v) - T_t(\nu_t)(x, v)| \leq L \int_0^t e^{L(t-s)} W_1(\nu_s, \nu'_s) ds$$

Et donc :

$$W_1(\Theta \nu_t, \Theta \nu'_t) \leq L \int_0^t e^{L(t-s)} W_1(\nu_s, \nu'_s) ds \leq K_T \int_0^t W_1(\nu_s, \nu'_s) ds$$

Posons  $W_1^t(\nu., \nu'.) = \sup_{s \in [0, t]} W_1(\nu_s, \nu'_s)$  et montrons que  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$W_1^t(\Theta^k \nu., \Theta^k \nu'.) \leq \frac{(K_T t)^k}{k!} W_1^t(\nu., \nu'.)$$

Cela est vrai au rang 1. Et si cela est vrai pour un rang  $k$  alors  $\forall s \leq t$  :

$$\begin{aligned}
W_1(\Theta^{k+1} \nu_s, \Theta^{k+1} \nu'_s) &\leq K_T \int_0^s W_1(\Theta^k \nu_u, \Theta^k \nu'_u) du \\
&\leq K_T \int_0^t W_1(\Theta^k \nu_u, \Theta^k \nu'_u) du \\
&\leq K_T \int_0^t \frac{(K_T u)^k}{k!} W_1^u(\nu., \nu'.) du \\
&\leq K_T W_1^t(\nu., \nu'.) \int_0^t \frac{(K_T u)^k}{k!} du \\
&= \frac{(K_T t)^{k+1}}{k+1!} W_1^t(\nu., \nu'.)
\end{aligned}$$

Donc

$$W_1^t(\Theta^{k+1}\nu, \Theta^{k+1}\nu') \leq \frac{(K_T t)^{k+1}}{k+1!} W_1^t(\nu, \nu')$$

ce qui achève la récurrence. Donc pour  $k$  assez grand  $\Theta^k$  est contractante de  $C([0, T], P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  dans lui-même pour la distance  $W_1^T(\nu, \nu') = \sup_{t \in [0, T]} W_1(\nu_t, \nu'_t)$  pour laquelle il est complet (comme fermé de  $F_b([0, T], P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  l'ensemble des fonctions bornées sur  $[0, T]$  dans  $P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  qui est complet pour  $W_1^T$  car  $P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  est complet pour  $W_1$ ).  $\Theta^k$  admet donc un unique point fixe, donc  $\Theta$  aussi.  $\square$

Développons le raisonnement esquissé précédemment. On souhaite montrer que d'une suite de mesures empiriques indexée par le nombre de particules on peut extraire une sous suite convergente. On doit donc montrer qu'une famille de solutions de l'équation de Vlasov est relativement compacte, sous certaines conditions. Par passage à la limite toute sous suite convergera alors vers la solution de l'équation de Vlasov et donc la limite de champs moyen. Pour montrer la relative compacité d'une famille de solutions de Vlasov on utilise le théorème d'Ascoli qui requiert l'équicontinuité de cette famille ainsi que la "compacité ponctuelle" (ici en temps). Mais la compacité en terme de mesures s'obtient via le théorème de Prokhorov par le critère de la tension. C'est l'objet des propositions suivantes.

**Proposition 2.1.2.** *Si la famille des  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}}$  des mesures empiriques initiales est tendue, alors  $\forall t > 0$  la famille des  $(\mu_N^t)_{N \in \mathbb{N}}$  l'est aussi.*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  une mesure de probabilité, et  $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |\xi(\mu)(x, v)| &= \sqrt{|v|^2 + |\langle \mu, F(x - \cdot) \rangle|^2} \\ &\leq \sqrt{|v|^2 + |x|^2 + \|F\|_\infty^2} \\ &\leq |(x, v)| + \|F\|_\infty \end{aligned}$$

Soit maintenant  $t > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  fixés.  $\forall i \leq N$  On a :

$$\begin{aligned} (X_i^t, V_i^t) - (X_i^0, V_i^0) &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} (X_i^\tau, V_i^\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \xi(\mu_N^\tau)(X_i^\tau, V_i^\tau) d\tau \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire et par l'inégalité précédente (comme  $\mu_N^t$  est une mesure de probabilité pour tout  $N$  et  $t$ ) on a

$$|(X_i^t, V_i^t)| \leq |(X_i^0, V_i^0)| + \int_0^t (|(X_i^\tau, V_i^\tau)| + \|F\|_\infty) d\tau$$

Par un lemme de Gronwall on a :

$$|(X_i^t, V_i^t)| \leq (|(X_i^0, V_i^0)| + \|F\|_\infty) e^t - \|F\|_\infty$$

d'où

$$|(X_i^t, V_i^t) - (X_i^0, V_i^0)| \leq (|(X_i^0, V_i^0)| + \|F\|_\infty) e^t - \|F\|_\infty + |(X_i^0, V_i^0)|$$

Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  compact, tel que  $\forall N \in \mathbb{N}$   $\mu_N^0(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ .

$$\mu_N^0(K_\varepsilon^c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^0, V_i^0}(K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$$

i.e

$$\sum_{i=1}^N \delta_{X_i^0, V_i^0}(K_\varepsilon^c) \leq N\varepsilon$$

Comme  $\delta_{X_i^0, V_i^0}(K_\varepsilon^c) = 1$  ou  $0$ , il existe au plus  $m_\varepsilon^N \leq N\varepsilon$   $(X_i^0, V_i^0)$  dans  $K_\varepsilon^c$ , donc au moins  $n_\varepsilon^N \geq N(1 - \varepsilon)$  dans  $K_\varepsilon$  (supposons que ce sont les premières quitte à renuméroter). Comme celui ci est borné, il existe  $M > 0$  tels que pour  $i = 1..n_\varepsilon^N$   $|(X_i^0, V_i^0)| < M$

Montrons qu'il existe un compact  $K_{\varepsilon,t}$  tel que  $\mu_N^t(K_{\varepsilon,t}^c) \leq \varepsilon$

Posons  $\eta_t = (M + \|F\|_\infty) e^t - \|F\|_\infty + M$  et  $K_{\varepsilon,t} = \overline{\bigcup_{(x,v) \in K_\varepsilon} B((x,v), \eta_t)}$  (compact car fermé borné d'un espace de dimension finie). D'après ce qui précède  $\forall i = 1..n_\varepsilon^N$ ,  $(X_i^t, V_i^t) \in B((X_i^0, V_i^0), \eta_t) \subset K_{\varepsilon,t}$ . Donc :

$$\begin{aligned} \mu_N^t(K_{\varepsilon,t}^c) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^t, V_i^t}(K_{\varepsilon,t}^c) \\ &\geq n_\varepsilon^N / N \\ &\geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Et donc  $\mu_N^t(K_{\varepsilon,t}^c) \leq \varepsilon$  et la famille des  $(\mu_N^t)_{N \in \mathbb{N}}$  est tendue. □

**Proposition 2.1.3.** *On suppose que  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}}$  est tendue et que les vitesses initiales verifient la condition suivante :*

$$\exists C > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |V_i^0| \leq C$$

*Alors la famille des fonctions continues de  $[0, T]$  dans  $P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$   $\{f_N : t \mapsto \mu_N^t\}_{N \in \mathbb{N}}$  est relativement compacte.*

*Démonstration.* Commen cons par montrer que sous cette condition les  $f_N$  sont equicontinues. On munit  $P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  de la distance  $W_1$ . Soit  $t$  et  $t' \in [0, T]$  on a :

$$\begin{aligned} W_1(\mu_N^t, \mu_N^{t'}) &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi d(\mu_N^t - \mu_N^{t'}) \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi d\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_i^t, V_i^t)} - \delta_{(X_i^{t'}, V_i^{t'})}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi d(\delta_{(X_i^t, V_i^t)} - \delta_{(X_i^{t'}, V_i^{t'})}) \right| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_1(\delta_{(X_i^t, V_i^t)}, \delta_{(X_i^{t'}, V_i^{t'})}) \end{aligned}$$

Or par les proprietés de la distance  $W_1$  on a

$$W_1(\delta_{(X_i^t, V_i^t)}, \delta_{(X_i^{t'}, V_i^{t'})}) = \left| (X_i^t, V_i^t) - (X_i^{t'}, V_i^{t'}) \right|$$

Mais on a  $\forall i = 1..N$  (si on suppose par exemple que  $t > t'$ )

$$\begin{aligned} \left| (X_i^t, V_i^t) - (X_i^{t'}, V_i^{t'}) \right| &= \left| \int_{t'}^t \xi(\mu_N^\tau)(X_i^\tau, V_i^\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{t'}^t \sqrt{|V_i^\tau|^2 + \|F\|_\infty^2} d\tau \end{aligned}$$

Donc on a  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$W_1(\mu_N^t, \mu_N^{t'}) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{t'}^t \sqrt{|V_i^\tau|^2 + \|F\|_\infty^2} d\tau$$

Mais :

$$\begin{aligned}
W_1(\mu_N^t, \mu_N^{t'}) &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{t'}^t \sqrt{|V_i^\tau|^2 + \|F\|_\infty^2} d\tau \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{t'}^t |V_i^\tau| d\tau + \|F\|_\infty |t - t'| \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_{t'}^t \|F\|_\infty T + |V_i^0| d\tau + \|F\|_\infty |t - t'| \\
&= \|F\|_\infty (T + 1) |t - t'| + |t - t'| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |V_i^0| \\
&\leq (\|F\|_\infty (T + 1) + C) |t - t'|
\end{aligned}$$

Et on a bien que les  $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$  sont equicontinues. Par ailleurs,  $\forall t \in [0, T]$  la famille des  $(f_N(t) = \mu_N^t)_{N \in \mathbb{N}}$  est relativement compacte pour la distance  $W_1$  car elle est tendue d'après la proposition précédente (puisqu'on a suppose  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}}$  tendue). On en deduit d'après le théorème d'Ascoli que la famille des  $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est relativement compacte. □

**Remarque:** Par l'inegalité d'Hodler on a :

$$\sum_{i=1}^N |V_i^0| \leq \sqrt{N} \left( \sum_{i=1}^N |V_i^0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |V_i^0| \leq \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |V_i^0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Donc la condition spécifiée dans la proposition précédente est obtenue dans le cas on a une borne uniforme sur les energies cinétiques initiales.

**Théorème 2.1.4.** *Si  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\mu^0 \in P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , et que les  $|V_i^0|$  sont tels que*

$$\exists C > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |V_i^0| \leq C$$

*Alors  $\{(\mu_N^t)_{t \in [0, T]}\}_{N \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $(\mu^t)_{t \in [0, T]}$  l'unique solution faible de l'équation de Vlasov pour le donnée initiale  $\mu^0$ .*

*Démonstration.* Comme la famille des  $(\mu_N^0)_{N \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $\mu^0$ , elle est tendue. De plus, les  $|V_i^0|$  vérifiant la condition énoncée ci dessus, on a par le résultat de la proposition précédente que  $\{f_N : t \mapsto \mu_N^t\}_{N \in \mathbb{N}}$  est relativement compacte. Soit alors  $f_{N_k}$  une sous famille convergente vers  $f \in C([0, T], P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ . ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \forall N_k \geq N_\varepsilon, \sup_{t \in [0, T]} W_1(\mu_{N_k}^t, f(t)) \leq \varepsilon$$

Comme  $\forall N \in \mathbb{N} (\mu_N^t)_{t \geq 0}$  est solution faible de l'équation de Vlasov, on a que pour toute fonction  $\chi \in C_c^\infty([0, T])$  et pour toute fonction  $\phi \in S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

$$-\langle \mu_N^0, \chi(0)\phi \rangle = \int_0^T \langle \mu_N^t, \chi'(t)\phi \rangle dt + \int_0^T \langle \mu_N^t, v \cdot \nabla_x(\chi\phi) \rangle dt + \int_0^T \chi(t) \langle \mu_N^t, \tilde{F}(\mu_N^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt$$

Où  $\tilde{F}(\mu)(x) = \langle \mu, F(x - \cdot) \rangle$ . Commençons par traiter la convergence du terme non linéaire. On souhaite montrer que  $\int_0^T \langle \mu_{N_k}^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle \mu^t, \tilde{F}(\mu^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt$  ou  $\mu^t = f(t)$ . On a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle \mu_{N_k}^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt - \int_0^T \langle \mu^t, \tilde{F}(\mu^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \langle \mu_{N_k}^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt - \int_0^T \langle \mu^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt \right| \\ & + \left| \int_0^T \langle \mu^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt - \int_0^T \langle \mu^t, \tilde{F}(\mu^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle dt \right| \end{aligned}$$

Mais  $\forall t \in [0, T]$  on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle \mu_{N_k}^t - \mu^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \rangle \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) d(\mu_{N_k}^t - \mu^t) \right| \\ &\leq \left\| \tilde{F} \nabla_v(\chi\phi) \right\|_{Lip} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{\tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi)}{\left\| \tilde{F} \nabla_v(\chi\phi) \right\|_{Lip}} d(\mu_{N_k}^t - \mu^t) \right| \\ &\leq CW_1(\mu_{N_k}^t, \mu^t) \end{aligned}$$

Car si  $F$  est lipschitzienne,  $\tilde{F}(\mu)$  l'est aussi avec une constante indépendante de la probabilité  $\mu$ , et  $\nabla_v(\chi\phi)$  est lipschitzienne car elle est dans la classe de schwartz. De même on a que :

$$\left| \langle \mu^t, (\tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) - \tilde{F}(\mu^t)(x)) \nabla_v(\chi\phi) \rangle \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (\tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) - \tilde{F}(\mu^t)(x)) \nabla_v(\chi\phi) d\mu^t \right|$$



Mais  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  on a :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) - \tilde{F}(\mu^t)(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - \cdot) d\mu_{N_k}^t - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - \cdot) d\mu^t \right| \\ &\leq \|F\|_{Lip} \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{F(x - \cdot)}{\|F\|_{Lip}} d(\mu_{N_k}^t - \mu^t) \right| \\ &\leq \|F\|_{Lip} W_1(\mu_{N_k}^t, \mu^t) \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \left\langle \mu^t, (\tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) - \tilde{F}(\mu^t)(x)) \nabla_v(\chi\phi) \right\rangle \right| \leq C' W_1(\mu_{N_k}^t, \mu^t)$$

Finalement en regroupant ces inégalités il vient :

$$\left| \int_0^T \left\langle \mu_{N_k}^t, \tilde{F}(\mu_{N_k}^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \right\rangle dt - \int_0^T \left\langle \mu^t, \tilde{F}(\mu^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \right\rangle dt \right| \leq (CT + C'T) \sup_{t \in [0, T]} W_1(\mu_{N_k}^t, \mu^t)$$

De la même manière, on aurait prouvé que

$$\int_0^T \left\langle \mu_{N_k}^t, \chi'(t)\phi \right\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \left\langle \mu^t, \chi'(t)\phi \right\rangle dt$$

et que

$$\int_0^T \left\langle \mu_{N_k}^t, v \cdot \nabla_x(\chi\phi) \right\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \left\langle \mu^t, v \cdot \nabla_x(\chi\phi) \right\rangle dt$$

De plus comme  $\mu_N^0 \rightharpoonup \mu_0$  toute sous suite  $\mu_{N_k}^0 \rightharpoonup \mu_0$ . Donc

$$-\left\langle \mu_{N_k}^0, \chi(0)\phi \right\rangle \longrightarrow -\left\langle \mu^0, \chi(0)\phi \right\rangle$$

En conclusion en passant à la limite pour une sous suite convergente de  $\{f_N : t \mapsto \mu_N^t\}_{N \in \mathbb{N}}$  vers  $f$  (avec  $f(t) = \mu^t$ ) on a

$$-\left\langle \mu^0, \chi(0)\phi \right\rangle = \int_0^T \left\langle \mu^t, \chi'(t)\phi \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \mu^t, v \cdot \nabla_x(\chi\phi) \right\rangle dt + \int_0^T \chi(t) \left\langle \mu^t, \tilde{F}(\mu^t)(x) \nabla_v(\chi\phi) \right\rangle dt$$

i.e  $(\mu^t)_{t \in [0, T]}$  est l'unique solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov de donnée initiale  $\mu^0$ . Donc  $\{f_N : t \mapsto \mu_N^t\}_{N \in \mathbb{N}}$  est une partie relativement compacte n'admettant qu'une valeur d'adhérence donc converge vers  $(\mu^t)_{t \in [0, T]}$  solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov pour la donnée  $\mu^0$ .

□

**Remarque:** Le résultat prouvé par les travaux plus ou moins concomitants de Braun et Hepp [4] et Dobrushin [5] dans les années 70 qui sera abordé dans la section suivante est beaucoup plus intéressant. Cependant il repose cruciallement sur le fait que la force d'interaction entre les particules est globalement lipschitzienne. La méthode utilisée précédemment pourrait nous conduire à prouver la relative compacité d'une famille de mesure empirique dans le cas où cette force d'interaction n'est que continue bornée. Cependant on ne pourrait pas conclure à la limite de champ moyen puisqu'on aurait pas l'unicité de solution à l'équation de Vlasov associée.

### Inégalité de Dobrushin

Dans cette section on aborde la limite de champ moyen de manière différente de la précédente, mais on suppose toujours que la force  $F$  d'interaction entre les particules est globalement lipschitzienne. Le résultat que l'on va énoncer dans cette partie est un résultat de stabilité démontrée par le mathématicien Roland Dobrushin. Un article de Francois Golse [7] fait référence à ce résultat par le nom d' "inégalité de Dobrushin". Cette section est la réalisation d'un exercice de [1].

Soit  $\mu \in P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  et posons  $\xi[\mu]$

$$\xi[\mu](x, v) = \left( v, \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - y) d\mu(y, w) \right)$$

Commençons par prouver le lemme suivant :

**Lemme 2.1.5.** *Soit  $L = \max(1, \|\nabla F\|_\infty)$ .*

$$\forall \mu \in P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \quad \|\xi(\mu)\|_{Lip} \leq L$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} |\xi(\mu)(x, v) - \xi(\mu)(x', v')| &= |(v, F(\mu)(x)) - (v', F(\mu)(x'))| \\ &= \sqrt{|v - v'|^2 + |F(\mu)(x) - F(\mu)(x')|^2} \end{aligned}$$

Mais on a :

$$\begin{aligned} |F(\mu)(x) - F(\mu)(x')| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - y) - F(x' - y) d\mu(y, w) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x - y) - F(x' - y)| d\mu(y, w) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - x'| \|\nabla F\|_\infty d\mu(y, w) \\ &= |x - x'| \|\nabla F\|_\infty \end{aligned}$$

Donc finalement on a bien

$$|\xi(\mu)(x, v) - \xi(\mu)(x', v')| \leq \max(1, \|\nabla F\|_\infty) |(x, v) - (x', v')|$$

i.e

$$\|\xi(\mu)\|_{Lip} \leq L$$

□

Soit  $(\mu_t)_{t \in [0, T]} \in C([0, T], P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$  et considérons l'EDO suivante :

$$\frac{d}{dt} f(t, x, v) = \xi(\mu_t)(f(t, x, v))$$

Soit  $T(\mu) : (t, x, v) \mapsto T_t(\mu)(x, v)$  la caractéristique associée a cette EDO  
i.e qui vérifie :

$$\frac{d}{dt} T_t(\mu)(x, v) = \xi(\mu_t)(T_t(\mu)(x, v))$$

On ne redémontre pas ici que  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  est solution faible de l'équation de Vlasov si et seulement si

$$\forall t \in [0, T], \mu_t = T_t(\mu) \# \mu_0$$

ou encore que  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  est un point fixe de l'application

$$\Theta : (\mu) \in C([0, T], P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)) \mapsto ((T_t(\mu)) \# \mu_0)_{t \in [0, T]} \in C([0, T], P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$$

Montrons maintenant le lemme suivant :

**Lemme 2.1.6.**  $\forall (\mu) \in C([0, T], P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)), \|T_t(\mu)\|_{Lip} \leq e^{Lt}$

*Démonstration.* Soit  $(x, v) \neq (x', v') \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  on a :

$$\frac{d}{dt} \frac{|T_t(\mu)(x, v) - T_t(\mu)(x', v')|}{|(x, v) - (x', v')|} \leq \frac{|\frac{d}{dt} T_t(\mu)(x, v) - \frac{d}{dt} T_t(\mu)(x', v')|}{|(x, v) - (x', v')|}$$

$$= \frac{|\xi(\mu_t)(T_t(\mu)(x, v)) - \xi(\mu_t)(T_t(\mu)(x', v'))|}{|(x, v) - (x', v')|}$$

$$\leq L \frac{|T_t(\mu)(x, v) - T_t(\mu)(x', v')|}{|(x, v) - (x', v')|}$$

Par un lemme de Gronwall on obtient :

$$\frac{|T_t(\mu.)(x, v) - T_t(\mu.)(x', v')|}{|(x, v) - (x', v')|} \leq e^{Lt}$$

D'où le résultat du lemme □

Soit maintenant  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$  et  $(\nu_t)_{t \in [0, T]} \in C([0, T], P_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d))$ , et soit  $(T_t(\mu.))_{t \in [0, T]}$ , et  $(T_t(\nu.))_{t \in [0, T]}$  les caractéristiques associées comme précédemment.

**Proposition 2.1.7.**

$$(i) \quad \|T_t(\mu.) - T_t(\nu.)\|_\infty \leq L \int_0^t e^{L(t-s)} W_1(\mu_s, \nu_s) ds$$

Soit  $T$  et  $\tilde{T}$  des applications lipschitziennes de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on a :

$$(ii)_1 \quad (T \# \mu_0, \tilde{T} \# \nu_0) \leq \left\| T - \tilde{T} \right\|_\infty W_1(T \# \mu_0, T \# \nu_0) \leq \|T\|_{Lip} W_1(\mu_0, \nu_0)$$

*Démonstration.* (i)

Soit  $\mu, \nu \in P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ .  $\forall (x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  on a

$$\begin{aligned} |\xi(\mu)(x, v) - \xi(\nu)(x, v)| &= |(v, F(\mu)(x)) - (v, F(\nu)(x))| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x-y) d\mu(y, w) - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x-y) d\nu(y, w) \right| \\ &= \|\nabla F\|_\infty \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{F(x-y)}{\|\nabla F\|_\infty} d(\mu - \nu)(y, w) \right| \end{aligned}$$

Mais  $(y, w) \mapsto \frac{F(x-y)}{\|\nabla F\|_\infty}$  est 1-lipschitzienne pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  donc par définition de la distance  $W_1$  on a :

$$|\xi(\mu)(x, v) - \xi(\nu)(x, v)| \leq \|\nabla F\|_\infty W_1(\mu, \nu) \leq L W_1(\mu, \nu)$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |T_t(\mu.)(x, v) - T_t(\nu.)(x, v)| &\leq \left| \frac{d}{dt} T_t(\mu.)(x, v) - \frac{d}{dt} T_t(\nu.)(x, v) \right| \\ &= |\xi(\mu_t)(T_t(\mu.)(x, v)) - \xi(\nu_t)(T_t(\nu.)(x, v))| \\ &\leq |\xi(\mu_t)(T_t(\mu.)(x, v)) - \xi(\nu_t)(T_t(\mu.)(x, v))| + |\xi(\nu_t)(T_t(\mu.)(x, v)) - \xi(\nu_t)(T_t(\nu.)(x, v))| \\ &\leq L W_1(\mu_t, \nu_t) + L |T_t(\mu.)(x, v) - T_t(\nu.)(x, v)| \end{aligned}$$

Où on a utilisé le résultat précédent et le fait que si  $\nu$  est une mesure de probabilité  $\|\xi(\nu)\|_{Lip} \leq L$ . Par un lemme de Gronwall il vient :

$$|T_t(\mu_t)(x, v) - T_t(\nu_t)(x, v)| \leq L \int_0^t e^{L(t-s)} W_1(\mu_s, \nu_s) ds$$

(ii)

$$\begin{aligned} W_1(T\#\nu_0, \tilde{T}\#\nu_0) &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi d(T\#\nu_0 - \tilde{T}\#\nu_0) \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi(T) - \phi(\tilde{T}) d\nu_0 \right| \\ &\leq \left| \int T - \tilde{T} d\nu_0 \right| \\ &\leq \int |T - \tilde{T}| d\nu_0 \\ &\leq \|T - \tilde{T}\|_\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1(T\#\nu_0, T\#\mu_0) &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi d(T\nu_0 - T\mu_0) \right| \\ &= \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi(T) d(\nu_0 - \mu_0) \right| \\ &= \|T\|_{Lip} \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \frac{\phi(T)}{\|T\|_{Lip}} d(\nu_0 - \mu_0) \right| \end{aligned}$$

Enfin on remarque que si  $\phi$  est telle que  $\|\phi\|_{Lip} \leq 1$  alors  $\left\| \frac{\phi(T)}{\|T\|_{Lip}} \right\|_{Lip} \leq 1$ .

Donc

$$W_1(T\#\nu_0, T\#\mu_0) \leq \|T\|_{Lip} \sup_{\|\phi\|_{Lip} \leq 1} \left| \int \phi d(\nu_0 - \mu_0) \right| = \|T\|_{Lip} W_1(\nu_0, \mu_0)$$

□

A l'aide de ces lemmes et proposition on est en mesure de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 2.1.8** (Inégalité de Dobrushin). Soit  $(\mu_t)_{t \in [0, T]}$ ,  $(\nu_t)_{t \in [0, T]}$  deux solutions faibles de l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_t + v \cdot \nabla_x \mu_t + \tilde{F}(\mu_t) \cdot \nabla_v \mu_t = 0$$

Avec

$$\tilde{F}(\mu_t)(x, v) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(x - y) d\mu_t(y, w)$$

Alors  $\forall t \in [0, T]$  on a :

$$W_1(\mu_t, \nu_t) \leq e^{2Lt} W_1(\mu_0, \nu_0)$$

Avec  $L = \max(1, \|\nabla F\|_\infty)$

*Démonstration.* Comme  $\mu_t$ , et  $\nu_t$  sont deux solutions faibles de l'équation de Vlasov on a que pour tout  $t \in [0, T]$

$$\mu_t = T_t(\mu) \# \mu_0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} W_1(\mu_t, \nu_t) &= W_1(T_t(\mu) \# \mu_0, T_t(\nu) \# \nu_0) \leq W_1(T_t(\mu) \# \mu_0, T_t(\mu) \# \nu_0) + W_1(T_t(\mu) \# \nu_0, T_t(\nu) \# \nu_0) \\ &\leq \|T_t(\mu)\|_{Lip} W_1(\mu_0, \nu_0) + \|T_t(\mu) - T_t(\nu)\|_\infty \\ &\leq L \int_0^t e^{L(t-s)} W_1(\mu_s, \nu_s) ds + e^{Lt} W_1(\mu_0, \nu_0) \end{aligned}$$

Par un lemme de Gronwall on a

$$W_1(\mu_t, \nu_t) \leq e^{Lt} W_1(\mu_0, \nu_0) \int_0^t L e^{L(t-s)} ds \leq e^{2Lt} W_1(\mu_0, \nu_0)$$

□

### 2.1.2 Propagation du chaos

La problématique de propagation du chaos ne revêt pas un intérêt particulier dans le cadre purement déterministe où la dynamique d'évolution du système de particules ne comporte pas d'aléa. Néanmoins on s'y intéressera dans cette partie afin d'introduire différentes notions et définitions qui seront reprises dans le cadre stochastique.

Tout d'abord il est nécessaire de préciser le sens que l'on donne au mot chaos. Il s'agit du chaos moléculaire introduit par Boltzmann qui consiste

en l'indépendance stochastique de deux particules quelconques quand le nombre de particules tend vers l'infinie (on a vu au chapitre I que deux particules quelconques ne sont en général pas indépendantes quand le nombre de particules est fixé). Si une dynamique conserve le caractère chaotique d'un système de particules initiales au cours du temps on dit qu'elle propage le chaos [8].

On va maintenant donner les définitions nécessaires pour poser le problème et y répondre dans le cas peu intéressant d'une évolution purement déterministe.

**Définition 2.1.9.** Soit  $E$  un espace polonais et  $u_N$  une suite de probabilité symétrique sur  $E^N$  (par symétrique on entend que si  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, N\}$  et  $T_\sigma : (x_1, \dots, x_N) \in E^N \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)}) \in E^N$  alors  $u_N = T_\sigma \# u_N$ ). On dit que  $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est  $u$ -chaotique ( $u \in P(E)$ ) si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \phi_1, \dots, \phi_k \in C_b(E), \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_k \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, u_N \rangle = \prod_{i=1}^k \langle u, \phi_i \rangle$$

On rappelle que  $\langle u, \phi \rangle = \int_E \phi(x) du(x)$

Considérons le système de particules auquel on s'intéresse depuis le début de ce chapitre, dans lequel les positions et les vitesses initiales  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1 \dots N}$  sont aléatoires, de loi  $\mu_0^{(N)}$ . Ainsi au temps  $t$  les positions et les vitesses  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N}$  sont également aléatoires, de loi  $\mu_t^{(N)}$ . Le problème est donc de montrer que  $\mu_0^{(N)}$  est chaotique pour une certaine probabilité  $\mu_0$  implique que  $\mu_t^{(N)}$  l'est également pour une certaine mesure  $\mu_t$ . On verra de plus que  $\mu_t$  est la solution faible de l'équation de Vlasov pour la donnée initiale  $\mu_0$ . Dans ce but on a les résultats suivants issus [3].

**Proposition 2.1.10.** Soit  $u_N$  une suite de probabilités symétriques sur  $E^N$ . Soit  $X = (X_1, \dots, X_N)$  une variable aléatoire sur  $E^N$  de loi  $u_N$ . Soit  $\hat{\mu}^N$  la mesure empirique associée à  $X$  définie par :

$$\hat{\mu}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i}$$

$\hat{\mu}^N$  est donc une variable aléatoire à valeurs dans  $P(E)$ .

$u_N$  est  $u$ -chaotique si et seulement si la suite de variables aléatoires  $\hat{\mu}^N$  converge en loi vers la variable aléatoire constante  $u$ .

Notons  $L^N$  la loi de  $\widehat{\mu}^N$ , c'est donc élément de  $P(P(E))$ . La loi de la variable aléatoire valant presque sûrement  $u$  est  $\delta_u \in P(P(E))$ . On a vu dans la partie consacrée aux distances de Wasserstein que  $P(E)$  munit de la distance  $W_1$  est un espace polonais. On peut donc par le même procédé construire la distance  $W'_1$  sur  $P(P(E))$ .

$$W'_1(L^N, \delta_u) = \inf_{\pi \in \Pi(L^N, \delta_f)} \int_{P(E) \times P(E)} W_1(\mu, \nu) d\pi(\mu, \nu)$$

Mais on a vu dans la partie concernant le problème de transport de masses de Kantorovich que  $\Pi(L^N, \delta_u) = L^N \otimes u$  donc :

$$W'_1(L^N, \delta_u) = \int_{P(E) \times P(E)} W_1(\mu, \nu) d(L^N \otimes u)(\mu, \nu) = \int_{P(E) \times P(E)} W_1(\mu, u) dL^N(\mu)$$

Comme  $L^N$  est la loi de  $\widehat{\mu}^N$ , par définition de la loi d'une variable aléatoire on a :

$$W'_1(L^N, \delta_u) = \mathbb{E} (W_1(\widehat{\mu}^N, u))$$

Reprenons le système de particules avec la suite de conditions initiales  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1, \dots, N}$  variable aléatoire de loi  $\mu_0^{(N)}$  et  $\widehat{\mu}_0^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(X_i^0, V_i^0)}$  la mesure empirique associée à cette loi. On suppose la suite  $(\mu_0^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$   $\mu_0$ -chaotique. Soit  $\mu_t$  la solution faible au temps  $t$  de l'équation de Vlasov pour la donnée initiale  $\mu_0$ . Par l'inégalité de Dobrushin on a presque sûrement :

$$W_1(\widehat{\mu}_t^N, \mu_t) \leq e^{2Lt} W_1(\widehat{\mu}_0^N, \mu_0)$$

En prenant l'espérance de cette équation on obtient aux vues des remarques faites précédemment :

$$W'_1(L_t^N, \delta_{\mu_t}) \leq e^{2Lt} W'_1(L_0^N, \delta_{\mu_0})$$

Avec  $L_t^N$  (resp.  $L_0^N$ ) la loi de  $\widehat{\mu}_t^N$  (resp.  $\widehat{\mu}_0^N$ ). On en déduit que  $L_t^N$  converge vers  $\delta_{\mu_t}$  i.e. que la suite des  $\mu_t^{(N)}$  loi de  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1, \dots, N}$  est  $\mu_t$ -chaotique.

## 2.2 Cas avec bruit

### 2.2.1 Couplage

On reprend le système d'EDS introduit dans la première section du premier chapitre :

$$(S_1) \begin{cases} dX_i^t = V_i^t dt \\ dV_i^t = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_i^t - X_j^t) dt + \nu dB_i^t \end{cases}$$



Où  $(B_i^t)_{i=1\dots N}$  sont des mouvements browniens indépendants. La présence de ces termes entraîne l'appellation "avec bruit". On prend pour conditions initiales  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1\dots N}$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi  $\mu_0$ . Contrairement au cas déterministe les mesures empiriques ne peuvent pas nous permettre d'établir un lien direct avec l'équation qui va régir la limite macroscopique. En effet les mesures empiriques considérées dans le cadre brutité sont des variables aléatoires dans  $P(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  et donc ne peuvent pas être solution d'EDP déterministe. C'est la marginale à une particule  $\mu_1^t$  de la loi du vecteur aléatoire  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1\dots N}$  qu'il faudra considérer. On rappelle que lorsqu'on aborde des problématiques de propagation du chaos toutes les probabilités considérées sont symétriques. Mais comme la loi de  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1\dots N}$  qui est  $\mu_0^{\otimes N}$  et le système d'EDS sont symétriques la loi de  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1\dots N}$  l'est aussi. On va montrer que la limite qu'admet ce système quand le nombre de particules tend vers l'infinie est le système couplé solution de l'EDS non linéaire suivante :

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{l} dX^t = V^t dt \\ dV^t = \left( \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} F(X_i^t - y) u_t(y, w) dy dw \right) dt + \nu dB_i^t, (X^t, V^t) \sim u_t \end{array} \right.$$

C'est à dire que quand le nombre de particules devient grand, la trajectoire d'une particule est proche de la solution de cette EDS non linéaire pour les mêmes données initiales. Au passage l'indépendance quand le nombre de particules est grand sera garantie puisque pour des conditions initiales et des browniens indépendants les solutions de  $(S_2)$  sont indépendantes. L'existence et l'unicité de solution à cette EDS non linéaire sont démontrées par exemple dans [3] par une méthode de point fixe. On n'en fera pas la démonstration ici. En revanche on démontre que les trajectoires sont aussi proches que l'on veut quand  $N$  devient grand.

**Proposition 2.2.1** (Snitzmann). *On suppose  $F$  lipschitzienne (de constante  $K$ ), bornée. Soit  $((X_i^t, V_i^t)_{i=1\dots N})$  solution au temps  $t$  de  $(S_1)$  pour la donnée initiale  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1\dots N}$  i.i.d. et  $((X_i^t, V_i^t)_{i=1\dots N})$  vecteur de solutions i.i.d. de loi  $u_t$  de  $(S_2)$  pour les données initiales respectives  $(X_i^0, V_i^0)$ . Il existe une constante  $C(t)$  ne dépendant que de  $t$  tel que*

$$\sup_{i=1\dots N} \mathbb{E} (|(X_i^t, V_i^t) - (X_i^t, V_i^t)|) \leq \frac{C(t)}{\sqrt{N}}$$

*Démonstration.* Comme on a choisit les mêmes données initiales et les mêmes

mouvements browniens on a :

$$\begin{cases} X_i^t - X_i'^t = \int_0^t V_i^s - V_i'^s ds \\ V_i^t - V_i'^t = \int_0^t \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_i^s - X_j^s) - \int F(X_i'^s - y) u_s(y, w) dy dw \right) ds \end{cases}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_i^s - X_j^s) - \int F(X_i'^s - y) u_s(y, w) ds &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ((F(X_i^s - X_j^s) - F(X_i'^s - X_j^s)) \\ &\quad + (F(X_i'^s - X_j^s) - F(X_i'^s - X_j'^s)) + b_s(X_i'^s, X_j'^s)) \end{aligned}$$

Ou  $b_s$  est l'application lipschitzienne bornée définie par :

$$b_s(x, x') = F(x - x') - \int F(x - y) u_s(y, w)$$

En utilisant le fait que  $F$  est  $K$ -Lipschitz on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(X_i^s - X_j^s) - \int F(X_i'^s - y) u_s(y, w) ds \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K |X_j^s - X_j'^s| \\ &\quad + K |X_i^s - X_i'^s| \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_s(X_i'^s, X_j'^s) \right| \end{aligned}$$

On a donc :

$$|X_i^t - X_i'^t| + |V_i^t - V_i'^t| \leq \int_0^t |V_i^s - V_i'^s| + K |X_i^s - X_i'^s| + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K |X_j^s - X_j'^s| + \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_s(X_i'^s, X_j'^s) \right| ds$$

Sommons ces inegalités sur  $i$ , divisons par  $N$  et prenons l'espérance de l'inéquation ainsi obtenue. On rappelle que par la symétrie des lois de  $((X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N})$  et  $((X_i'^t, V_i'^t)_{i=1 \dots N})$  on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |X_i^t - X_i'^t| + |V_i^t - V_i'^t| \right) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} (|X_i^t - X_i'^t| + |V_i^t - V_i'^t|) \\ &= \mathbb{E} (|X_1^t - X_1'^t| + |V_1^t - V_1'^t|) \end{aligned}$$

On a donc en posant  $L = \max(1, K)$  :

$$\mathbb{E} (|X_1^t - X_1^{t'}| + |V_1^t - V_1^{t'}|) \leq 2L \int_0^t \mathbb{E} (|X_1^s - X_1^{s'}| + |V_1^s - V_1^{s'}|) + B(s) ds$$

Avec

$$B(s) = \mathbb{E} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_s(X_1^{s'}, X_j^{s'}) \right| \right)$$

Mais par l'inégalité de Hodler on a :

$$B^2(s) \leq \mathbb{E} \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N b_s(X_1^{s'}, X_j^{s'}) \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \frac{1}{N^2} \sum_{j,k} b_s(X_1^{s'}, X_j^{s'}) b_s(X_1^{s'}, X_k^{s'}) \right)$$

Maintenant pour  $j \neq k$  on a :

$$\begin{aligned} b_s(X_1^{s'}, X_j^{s'}) b_s(X_1^{s'}, X_k^{s'}) &= \left( F(X_1^{s'} - X_j^{s'}) - \int F(X_1^{s'} - y) u_s(y, w) \right) \\ &\quad \times \left( F(X_1^{s'} - X_k^{s'}) - \int F(X_1^{s'} - y) u_s(y, w) \right) \\ &= F(X_1^{s'} - X_j^{s'}) F(X_1^{s'} - X_k^{s'}) - F(X_1^{s'} - X_j^{s'}) \int F(X_1^{s'} - y) u_s(y, w) \\ &\quad - F(X_1^{s'} - X_k^{s'}) \int F(X_1^{s'} - y) u_s(y, w) + \left( \int F(X_1^{s'} - y) u_s(y, w) \right)^2 \end{aligned}$$

Prenons l'espérance de chacun des termes précédents. On rappelle que la loi du vecteur aléatoire  $(X_i^{t'}, V_i^{t'})_{i=1 \dots N}$  est  $u_t^{\otimes N}$ . On abandonne dans les notations la dépendance de  $u_s$  en sa seconde variable pour la simplicité.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (F(X_1^{s'} - X_j^{s'}) F(X_1^{s'} - X_k^{s'})) &= \int F(x - y) F(x - w) u_s(x) u_s(y) u_s(w) \\ &= \int F(x - y) \left( \int F(x - w) u_s(w) \right) u_s(x) u_s(y) \\ &= \int F(x - y) (F * u_s)(x) u_s(x) u_s(y) \\ &= \int (F * u_s)^2(x) u_s(x) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( F(X_1'^s - X_j'^s) \int F(X_1'^s - y) u_s(y) \right) &= \int F(x - w) \left( \int F(x - y) u_s(y) \right) u_s(x) u_s(w) \\ &= \int F(x - w) (F * u_s)(x) u_s(x) u_s(w) \\ &= \int (F * u_s)^2(x) u_s(x)\end{aligned}$$

De meme on a :

$$\mathbb{E} \left( F(X_1'^s - X_k'^s) \int F(X_1'^s - y) u_s(y, w) \right) = \int (F * u_s)^2(x) u_s(x)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left( \left( \int F(X_1'^s - y) u_s(y, w) \right)^2 \right) &= \int \left( \int F(x - y) u_s(y, w) \right)^2 u_s(x) \\ &= \int (F * u_s)^2(x) u_s(x)\end{aligned}$$

Finalement dès que  $j \neq k$  on a  $\mathbb{E} \left( b_s(X_1'^s, X_j'^s) b_s(X_1'^s, X_k'^s) \right) = 0$ . On a donc :

$$B^2(s) \leq \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \mathbb{E} (b_s(X_i'^s, X_j'^s)^2) \leq \frac{1}{N} 4 \|F\|_\infty^2$$

En utilisant cette majoration dans l'inégalité obtenue plus haut on a :

$$\mathbb{E} (|X_1^t - X_1'^t| + |V_1^t - V_1'^t|) \leq 2L \int_0^t \mathbb{E} (|X_1^s - X_1'^s| + |V_1^s - V_1'^s|) + \frac{2}{\sqrt{N}} \|F\|_\infty ds$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbb{E} (|X_1^t - X_1'^t| + |V_1^t - V_1'^t|) \leq \frac{2 \|F\|_\infty}{\sqrt{N}} e^{2Lt}$$

En rappelant que par symétrie des lois prouver le résultat pour la première particule est la même chose que le faire pour la  $i$ -ème on a le résultat.  $\square$

Le système de solution de l'EDS non linéaire (ou "processus non linéaire" comme il est appelé dans [3]) apparait comme la limite du système de particules quand le nombre de particules devient grand dans le cas stochastique. On peut faire le lien avec une équation de type Vlasov non pas via les mesures empiriques mais avec les marginales en temps du "processus non linéaire".

**Proposition 2.2.2.** *Soit  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  les marginales en temps du processus solution de  $(S_2)$  pour les conditions initiales  $(X_0, V_0) \sim \mu_0$  (i.e  $(X_t, V_t) \sim \mu_t$ ). Alors  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est solution de l'équation de Fokker-Planck-Vlasov :*

$$\partial_t \mu_t + v \cdot \nabla_x \mu_t + \tilde{F}(\mu_t) \nabla_v \mu_t = \frac{\nu^2}{2} \Delta_v \mu_t$$

Pour la donnée initiale  $\mu_{t=0} = \mu_0$ .

*Démonstration.* On obtient ce résultat par une application de la formule d'Itô.  $\square$

On va maintenant faire le lien entre ce système couplé et la propagation du chaos. On l'a vu dans la section précédente prouver la propagation du chaos revient à prouver la convergence en loi des mesures empiriques  $\hat{\mu}_N^t$  aléatoires définies par :

$$\hat{\mu}_N^t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^t, V_i^t}$$

Variable aléatoire à valeur dans l'espace des mesures de probabilités vers une variable aléatoire constante à valeur dans l'espace des mesures de probabilité  $\mu_t$  (qui s'avère être la solution faible au temps  $t$  de l'équation de Fokker-Planck-Vlasov).

Une caractérisation très pratique de cette convergence en loi dans l'espace plutôt abstrait des mesures de probabilités est donnée par Villani dans [2] :

**Proposition 2.2.3** (Villani). *Soit  $X = (X_1, \dots, X_N)$  une variable aléatoire sur  $E^N$  ( $E$  un espace polonais) de loi  $\mu^{(N)}$ , on note  $\hat{\mu}_N$  la mesure empirique associée à  $X$ . Soit  $\mu \in P(E)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\hat{\mu}_N$  converge en loi vers  $\mu$
- (ii)  $\forall \phi \in Lip(E) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu^{(N)}} (|\int_E \phi d(\hat{\mu}_N - \mu)|) = 0$

Sans en refaire la démonstration, on peut dire que ce résultat s'obtient en définissant une métrique sur  $P(E)$  à partir d'une suite dense de fonctions lipschitziennes et ensuite en définissant la distance  $W_1$  sur  $P(P(E))$  associée à cette métrique. À l'aide de ce résultat on prouve de manière un peu plus formelle la propagation du chaos.

**Proposition 2.2.4.** *Soit  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N}$ , de loi  $\mu_t^{(N)}$ , solution au temps  $t$  de  $(S_1)$  pour la donnée initiale  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1 \dots N}$  de loi  $\mu_0^{\otimes N}$ . La suite des  $(\mu_t^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$  est  $\mu_t$ -chaotique, où  $\mu_t$  est la solution faible au temps  $t$  de l'équation de Fokker-Planck-Vlasov pour la donnée initiale  $\mu_0$*

*Démonstration.* Soit  $\phi \in Lip(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ . Aux vues de la proposition précédente il suffit de prouver que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_t^{(N)}} \left( \left| \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \phi d(\widehat{\mu}_t^N - \mu_t) \right| \right) = 0$$

Où  $\widehat{\mu}_t^N$  est la mesure empirique associée à  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N}$ . Soit  $(X_i^{tt}, V_i^{tt})_{i=1 \dots N}$  vecteur de variables aléatoires indépendantes des solutions de  $(S_2)$  pour la donnée initiale  $(X_i^0, V_i^0)$  et  $\widehat{\nu}_t^N$  sa mesure empirique associée. On a :

$$\mathbb{E} \left( \left| \int \phi d(\widehat{\mu}_t^N - \mu_t) \right| \right) \leq \mathbb{E} \left( \left| \int \phi d(\widehat{\mu}_t^N - \widehat{\nu}_t^N) \right| \right) + \mathbb{E} \left( \left| \int \phi d(\widehat{\nu}_t^N - \mu_t) \right| \right)$$

Le deuxième terme converge vers 0 car la loi des  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N}$  est  $\mu_t$ -chaotique (en effet comme ces variables aléatoires sont indépendantes et de loi  $\mu_t$ , la loi des  $(X_i^t, V_i^t)_{i=1 \dots N}$  est  $N$  fois le produit tensoriel de  $\mu_t$  avec lui-même).

De plus on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \left| \int \phi d(\widehat{\mu}_t^N - \widehat{\nu}_t^N) \right| \right) &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} (|\phi(X_i^t, V_i^t) - \phi(X_i^{tt}, V_i^{tt})|) \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\phi\|_{Lip} \mathbb{E} (|(X_i^t, V_i^t) - (X_i^{tt}, V_i^{tt})|) \\ &\leq \|\phi\|_{Lip} \frac{C(t)}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

Où on a utilisé le résultat de Snitzmann. □

### 2.2.2 Estimation de déviation

Dans cette section on s'intéresse au système de particules bruité suivant :

$$\frac{d^2 X_i^t}{dt^2} = dB_i^t - \nabla V(X_i^t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla W(X_i^t - X_j^t)$$

où les  $(B_i)_i = 1, \dots, N$  sont des mouvements browniens indépendants, pour les conditions initiales  $(X_i^0, V_i^0)_{i=1 \dots N}$  i.i.d. de loi  $f_0$ . On a rajouté une force extérieure modélisée par  $-\nabla V$ , cependant par la même démarche que dans la section précédente on aurait été en mesure d'exhiber un système couplé c'est à dire un vecteur de solution de l'EDS :

$$\frac{d^2 Y^t}{dt^2} = dB_i^t - \nabla V(Y^t) - \int \nabla W(Y^t - y) f_t(y), \quad Y_t \sim f_t$$

Et donc en reprenant le résultat de la section précédente on a pour tout fonction  $\phi$  lipschitzienne de constante plus petite que 1 on a :

$$\mathbb{E} \left( \int \phi d(\widehat{\mu}_t^N - f_t) \right) \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

Dans cette section on donne des estimations sur :

$$\mathbb{P} \left( \left| \int \phi d(\widehat{\mu}_t^N - f_t) \right| \geq \varepsilon \right)$$

ce qui est a priori plus contraignant, avec certaines hypothèses sur  $V$  et  $W$ . Cette section est également la réalisation d'un exercice de [1].

**Définition 2.2.5.** Soit  $\mu \in P(X)$ . On dit que  $\mu$  suit une inégalité de Talagrand de paramètre  $\lambda$  si :

$\forall f \geq 0$  telle que  $\int_X f d\mu = 1$

$$W_2(f\mu, \mu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} \int_X f \log(f) d\mu}$$

On dit que  $\mu$  suit une inégalité de Soblev logarithme si :

$$\int_X f \log(f) d\mu \leq \frac{1}{2\lambda} \int_X |\nabla(\log(f))|^2 d\mu$$

De plus on admet que si une mesure de probabilité suit une inégalité de Soblev logarithme alors elle suit une inégalité de Talagrand de même paramètre.

On commence par établir une série de lemmes généraux avant d'en venir au résultat principal.

**Lemme 2.2.6.** Soit  $\mu \in P(\mathbb{R}^d)$  qui satisfait une inégalité de Talagrand de paramètre  $\lambda$ . Soit  $\phi \in Lip(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\|\phi\|_{Lip} \leq 1$  et  $\int \phi d\mu = 0$ .

Alors  $\forall t > 0$  on a :

$$\int e^{t\phi} d\mu \leq e^{\frac{t^2}{2\lambda}}$$

*Démonstration.* Soit  $\phi$  lipschitzienne telle que  $\int \phi d\mu = 0$ ,  $\|\phi\|_{Lip} \leq 1$ . On a par les propriétés des distances de Wasserstien :

$$\int \phi f d\mu - \int \phi d\mu \leq W_1(\mu f, \mu) \leq W_2(\mu f, \mu)$$

Donc

$$\int \phi f d\mu \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} \int f \log f d\mu}$$

Car  $\mu$  satisfait une inégalité de Talagrand. Enfin, en utilisant l'inégalité  $ab \leq a^2/2 + b^2/2$  on obtient

$$\int \phi f d\mu \leq \frac{t}{2\lambda} + \frac{1}{t} \int f \log f d\mu$$

Posons maintenant  $F(f) = \int \phi f d\mu - \frac{1}{t} \int f \log f d\mu$ . On cherche à maximiser cette fonctionnelle sous la contrainte  $f \geq 0$  et  $f\mu$  est une probabilité. Soit  $f$  qui vérifie ces contraintes et  $g$  telle que  $f + g$  les vérifie encore (donc  $f \geq g$  et  $\int g d\mu = 0$ ). On a :

$$\begin{aligned} F(f + g) &= \int \phi(f + g) d\mu - \frac{1}{t} \int (f + g) \log(f + g) d\mu \\ &= F(f) + \int \phi g d\mu - \frac{1}{t} \int g \log(f) d\mu - \frac{1}{t} \int (f + g) \log\left(1 + \frac{g}{f}\right) d\mu \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour  $f$  maximise  $F$  est que pour toute fonction  $g$  telle que  $f + g$  vérifie la contrainte on ait :

$$\int g \left( \phi - \frac{1}{t} \log(f) \right) d\mu = 0$$

Comme  $\int g d\mu = 0$  la condition se réécrit :

$$\phi - \frac{1}{t} \log(f) = C$$

Donc on a  $f = e^{t(\phi - C)}$ . Mais  $\int f d\mu = 1$  donc :

$$C = -\frac{1}{t} \log \left( \int e^{t\phi} d\mu \right)$$

Finalement on a

$$\sup_{f \geq 0, \int f d\mu = 1} F(f) = \frac{1}{t} \log \left( \int e^{t\phi} d\mu \right) \leq \frac{t}{2\lambda}$$

D'où le resultat du lemme. □



**Lemme 2.2.7.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité qui suit une inégalité de Talagrand de paramètre  $\lambda$  et  $\phi \in Lip(\mathbb{R}^d)$ . Alors

$$\mu \left( \left| \phi - \int \phi d\mu \right| \geq \varepsilon \right) \leq 2e^{-\frac{\lambda\varepsilon^2}{2\|\phi\|_{Lip}^2}}$$

*Démonstration.* Soit  $\phi$  telle que  $\|\phi\|_{Lip} = 1$ , et  $\int \phi d\mu = 0$ . On a d'après le résultat précédent

$$\int e^{t\phi} d\mu \leq e^{\frac{t^2}{2\lambda}}$$

De plus on a :

$$\int e^{t\phi} d\mu \geq \int_{\phi \geq \varepsilon} e^{t\phi} d\mu \geq e^{t\varepsilon} \mu(\phi \geq \varepsilon)$$

De même en considérant  $-\phi$  on a

$$\int e^{t(-\phi)} d\mu \geq \int_{-\phi \geq \varepsilon} e^{t(-\phi)} d\mu \geq e^{t\varepsilon} \mu(-\phi \geq \varepsilon)$$

En sommant ces inégalités on obtient :

$$2e^{\frac{t^2}{2\lambda}} \geq e^{t\varepsilon} (\mu(\phi \geq \varepsilon) + \mu(-\phi \geq \varepsilon))$$

et pour  $t = \lambda\varepsilon$  on obtient :

$$2e^{-\frac{\lambda\varepsilon^2}{2}} \geq \mu(|\phi| \geq \varepsilon)$$

Maintenant on suppose  $\phi$  Lipschitzienne de constante non nécessairement égale à 1, mais toujours d'intégrale nulle par rapport à la mesure  $\mu$ . On reprend le raisonnement précédent avec  $\frac{\phi}{\|\phi\|_{Lip}}$  qui est bien 1 lipschitzienne.

$$\int e^{t \frac{\phi}{\|\phi\|_{Lip}}} d\mu \leq e^{\frac{t^2}{2\lambda}}$$

on pose  $t' = \frac{t}{\|\phi\|_{Lip}}$  et l'on a :

$$\int e^{t'\phi} \leq e^{\frac{t'^2 \|\phi\|_{Lip}^2}{2\lambda}}$$

Par les mêmes majorations que précédemment on a donc :

$$2e^{-\frac{t'^2 \|\phi\|_{Lip}^2}{2\lambda}} \geq e^{t'\varepsilon} \mu(|\phi| \geq \varepsilon)$$

En choisissant  $t' = \frac{\lambda\varepsilon}{\|\phi\|_{Lip}^2}$  on obtient :

$$2e^{-\frac{\lambda\varepsilon^2}{2\|\phi\|_{Lip}}} \geq \mu(|\phi| \geq \varepsilon)$$

Enfin, quand  $\phi$  est Lipschitzienne d'intégrale non nulle par rapport a la mesure  $\mu$ , on considère la fonction lipschitzienne  $\phi - \int \phi d\mu$  d'intégrale nulle par rapport a  $\mu$ , et on se rapporte au résultat précédent.  $\square$

**Corollaire 2.2.8.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}^d)^N$  qui satisfait une inégalité de Sobolev logarithme de paramètre  $\lambda$ . Soit  $\phi \in Lip(\mathbb{R}^d)$ , on a :

$$\|\phi\|_{Lip} \leq 1 \Rightarrow \mu \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i) - \int \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i) d\mu(x) \right| \geq \varepsilon \right) \leq 2e^{-\frac{\lambda N \varepsilon^2}{2}}$$

*Démonstration.* Comme  $\mu$  satisfait une inégalité de Sobolev logarithme, elle satisfait une inégalité de Talagrand de paramètre  $\lambda$  également. Soit  $\phi$  une fonction lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^d$  avec  $\|\phi\|_{Lip} \leq 1$ . Soit  $\Phi(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i)$ , on a :

$$\begin{aligned} |\Phi(x_1, \dots, x_N) - \Phi(x'_1, \dots, x'_N)| &= \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \phi(x_i) - \phi(x'_i) \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\phi(x_i) - \phi(x'_i)| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\phi\|_{Lip} |x_i - x'_i|_2 \\ &\leq \frac{\|\phi\|_{Lip}}{N} \sqrt{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i - x'_i|_2^2} \\ &= \frac{\|\phi\|_{Lip}}{\sqrt{N}} |(x_1, \dots, x_N) - (x'_1, \dots, x'_N)| \end{aligned}$$

Donc  $\Phi$  est lipschitzienne de constante inférieure à  $\frac{\|\phi\|_{Lip}}{\sqrt{N}}$ . Comme  $\mu$  satisfait une inégalité de Talagrand, on a par le résultat de la question précédente :

$$\mu(|\Phi - \int \Phi d\mu| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{\lambda\varepsilon^2}{2\|\Phi\|_{Lip}}} \leq 2e^{-\frac{\lambda N \varepsilon^2}{2\|\phi\|_{Lip}}} \leq 2e^{-\frac{\lambda N \varepsilon^2}{2}}$$

□

On cherche maintenant à établir une équation d'évolution suivie par  $\mu_t$  la loi de  $(X_i^t)_{i=1\dots N}$ .

Soit  $\phi \in S(\mathbb{R}^d)^N$ ,  $\phi$  est donc bien de classe  $C^2$  et ses dérivées sont bornées on peut donc appliquer la formule d'Itô.

$$\phi(X_t) = \phi(X_0) + \int_0^t \nabla \phi(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta \phi(X_s) ds$$

Mais  $dX_s = dB_s + G^N(X_s)ds$  avec

$$G^N(x_1, \dots, x_N) = \begin{pmatrix} -\nabla V(x_1) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla W(x_1 - x_j) \\ \vdots \\ -\nabla V(x_N) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla W(x_N - x_j) \end{pmatrix}$$

Donc

$$\phi(X_t) = \phi(X_0) + \int_0^t \nabla \phi(X_s) dB_s + \int_0^t \nabla \phi(X_s) G(X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta \phi(X_s) ds$$

En prenant l'espérance de cette dernière équation, on a :

$$\int \phi d\mu^t = \int \phi \mu^0 + \int_0^t \int \nabla \phi G^N d\mu_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int \Delta \phi d\mu_s ds$$

Avec  $\mu_t$  qui est la loi du vecteur aleatoire  $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$  et on a utilisé le fait que  $E(\int_0^t \nabla \phi(X_s) dB_s) = 0$ . Donc  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est une solution au sens des distributions de :

$$\frac{\partial \mu^t}{\partial t} = -\nabla(G^N \mu^t) + \frac{1}{2} \Delta \mu^t$$

Vérifions maintenant que  $G^N = -\nabla V_N$  où  $V_N$  est donné par :

$$V_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N V(x_i) + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} W(x_i - x_j)$$

On notera abusivement  $\frac{\partial V_N}{\partial x_i}$  le vecteur de  $d$  composantes des  $(\frac{\partial V_N}{\partial x_i^k})_{k=1..d}$ .

$$\frac{\partial V_N}{\partial x_i} = \nabla V(x_i) + \frac{1}{2N} \left( \sum_{j=1}^N \nabla W(x_i - x_j) - \sum_{j=1}^N \nabla W(x_j - x_i) \right)$$

Comme  $\nabla W$  est impaire, On a bien que

$$\frac{\partial V_N}{\partial x_i} = \nabla V(x_i) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \nabla W(x_i - x_j) = -G_{(i)}^N$$

Donc on a bien  $\nabla V_N = -G^N$  et  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  est bien solution au sens des distributions de :

$$\frac{\partial \mu^t}{\partial t} = \nabla(\nabla V_N \mu^t) + \frac{1}{2} \Delta \mu^t$$

On suppose  $V$   $\beta$ -uniformement convexe et  $W$  convexe. Montrons que  $V_N$  est  $\beta$ -convexe :  $\forall (x_1, \dots, x_N), (x'_1, \dots, x'_N) \in (\mathbb{R}^d)^N, \forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} V_N((1-t)(x_1, \dots, x_N) + t(x'_1, \dots, x'_N)) &= \sum_{i=1}^N V((1-t)x_i + tx'_i) \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} \sum W((1-t)(x_i - x_j) + t(x'_i - x'_j)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (1-t)V(x_i) + tV(x'_i) - \frac{\beta}{2}t(t-1)|x_i - x'_i|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{i,j} \sum (1-t)W(x_i - x_j) + tW(x'_i - x'_j) \\ &= (1-t)V_N(x_1, \dots, x_N) + tV_N(x'_1, \dots, x'_N) - \\ &\quad \frac{\beta}{2}t(t-1) \sum_{i=1}^N |x_i - x'_i|_2^2 \\ &= (1-t)V_N(x_1, \dots, x_N) + tV_N(x'_1, \dots, x'_N) \\ &\quad - \frac{\beta}{2}t(t-1)|(x_1, \dots, x_N) - (x'_1, \dots, x'_N)|_2^2 \end{aligned}$$

Et  $V_N$  est  $\beta$ -uniformement convexe. On peut donc utiliser donc un théorème de Bakry assurant que  $\mu_t$  satisfait une inégalité de Sobolev logarithme de paramètre  $\lambda_t$ , si l'on suppose que  $\mu_0$  satisfait une inégalité de Sobolev logarithme de paramètre  $\lambda_0$ .

On est en mesure de prouver le résultat d'estimation de déviation annoncé.

**Proposition 2.2.9.** *On note  $\hat{\mu}_t^N$  la mesure empirique aleatoire associée a  $(X_i^t)_{i=1 \dots N}$  et  $f_t$  solution faible au temps  $t$ . Soit  $\phi \in Lip(\mathbb{R}^d)$ , si  $\|\phi\|_{Lip} \leq 1$*

alors :

$$\mathbb{P} \left( \left| \int \phi d\widehat{\mu}_t^N - \int \phi f_t \right| \geq \frac{C}{\sqrt{N}} + r \right) \leq 2e^{-\frac{\lambda_t N \varepsilon^2}{2}}$$

*Démonstration.* De plus on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f_t(x) dx \right| \geq \sqrt{\frac{C}{N}} + r \right) \\ \leq & \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) - \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \mu_t \right| + \left| \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \mu_t - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f_t(x) dx \right| \geq \sqrt{\frac{C}{N}} + r \right) \end{aligned}$$

Mais comme  $\mu_t$  est la loi de  $(X_t^1, \dots, X_t^N)$  on a :

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \mu_t = E \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \right)$$

Et comme  $f_t$  est la loi des vecteurs aleatoires i.i.d  $Y_t^i$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f_t(x) dx = E \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(Y_t^i) \right)$$

De plus on a l'inégalité suivante :

$$\left| E \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \right) - E \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(Y_t^i) \right) \right| \leq \sqrt{\frac{C}{N}}$$

Finalement il vient :

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f_t(x) dx \right| \geq \sqrt{\frac{C}{N}} + r \right) \leq \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) - \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \mu_t \right| \geq r \right)$$

Et comme  $\mu_t$  satisfait une inégalité de Sobolev logarithme de paramètre  $\lambda_t$ , par le résultat du corollaire 4) on a :

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) - \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(X_t^i) \mu_t \right| \geq r \right) \leq 2e^{-\frac{\lambda_t N r^2}{2}}$$

D'où le résultat. □

**Conclusion** Dans de nombreux cas physiques on peut être amené à s'interroger sur le passage d'une dynamique discrète à une dynamique continue dans un système où le nombre de particules ou d'individus devient très grand. On s'est intéressé aux problématiques de champs moyens à travers les exemples d'une galaxie ou d'un gaz de particules chargées, on peut aussi s'y intéresser dans le cas d'un jeu où le nombre de joueurs deviendrait grand [11], ou dans un réseau de neurones [12].

Cependant il resterait beaucoup à dire sur les exemples de la galaxie ou du nuage de particules dans lesquels la force d'interaction dérive normalement du potentiel coulombien  $V(x) = \left( \frac{1}{|S|^{d-1}|z|^{d-2}} * \rho \right) (x)$  où  $\rho$  est la densité spatiale et  $d$  la dimension en espace (cf [9]). On a donc le système d'équation couplé :

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \partial_x f - \partial_x V \cdot \partial_v f &= 0 \\ -\Delta V &= \rho \end{aligned}$$

Appelé équation de Vlasov Poisson aux vues de la seconde équation. En dimension plus grande que 1 les problématiques de limite de champs moyens et de propagation du chaos sont extrêmement compliquées du fait que la force d'interaction n'est ni bornée ni continue. Cependant on peut arriver à conclure en dimension 1 dans le cas sans bruit (c'est à dire sans brownien) car même si la force présente toujours une discontinuité, elle est bornée. Pour cela on peut s'appuyer sur des applications de transport d'une mesure qui serait la limite macroscopique vers une mesure empirique. On a vu qu'une telle application existe dès que la mesure "de départ" est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ensuite en choisissant une partition judicieuse de  $\mathbb{R}$  par rapport à la discontinuité de la force on arrive à conclure. Ce sera l'objet, je l'espère, d'un prochain travail.

# Bibliographie

- [1] Villani C., *Topics in optimal transportation*. 2002.
- [2] Villani C., *Limite de champ moyen*, Cours de DEA 2002.
- [3] Snitzman A.S., *Topics in Propagation of Chaos* 1989.
- [4] Braun W. and Hepp K., *The Vlasov Dynamics and its Fluctuation in the  $1/N$  Limit of Interacting Classical Particles* 1977.
- [5] Dobrushin R.L., *Vlasov Equation* 1978.
- [6] Neunzert H., *An introduction to the nonlinear Boltzmann-Vlasov Equation*
- [7] Golse F., *The Mean-Field Limit for the Dynamics of Large Particle Systems* 2003.
- [8] Gottlieb A., *Markov Transitions and the Propagation of chaos*
- [9] Herau F. *Introduction aux equations cinetiques Solutions faibles pour l'equation de Vlasov-Poisson* Notes de cours de M2 2009.
- [10] Henon M., *Vlasov Equation ?* 1982.
- [11] Gueant O., Lasry J.M., Lions P.L., *Mean field games and applications*
- [12] Baladron J., Fasoli D., Faugeras O., Touboul J., *Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and FitzHugh-Nagumo neurons* 2012.