Université de Provence	2012–2013

M2 EDP-CS : Équations Cinétiques.

EXAMEN DU 12 MARS 2013

Exercice 1 Un système de Tourbillon pour les écoulements bi-dimensionnels.

I. Un modèle discret. Les systèmes de tourbillons (du type de ceux qui apparaissent quand on vide une baignoire) sont utilisés en hydrodynamique pour approcher l'équation d'Euler incompressible en dimension 2. Ici, on considérera N tourbillons d'intensité $\frac{1}{N}$, centrés en $X_1, X_2, \dots, X_N$. Les positions des centres vérifient alors le système d'équations

$$\forall i = 1, \dots, N, \qquad \dot{X}_i = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla K^{\perp}(X_i - X_j), \qquad K(y) := \frac{1}{2\pi} \ln |y| = \frac{1}{4\pi} \ln(|y|^2). \tag{1}$$

L'exposant $\perp$ désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique positif : $(x_1, x_2)^{\perp} := (-x_2, x_1)$.
Le problème de Cauchy (à $t = 0$) consiste à résoudre ce système, avec des conditions initiales $(X_1^0, \dots, X_N^0)$ données.

1) Montrer que le gradient $\nabla K(y) = \frac{y}{2\pi |y|^2}$ et calculer la Hessienne notée $\nabla^2 K$ pour $y \neq 0$. Préciser en particulier $\mathrm{div}(\nabla K^{\perp})$ et ΔK.
Pour quels $p \in [1, +\infty]$ a-t-on $\nabla K \in L^p(\mathbb{B})$, avec $\mathbb{B}$ la boule de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et rayon 1 ? [1]
Est-il vrai que $\nabla K \in W^{1,1}(\mathbb{B})$?

Comme le noyau d'interaction $\nabla K^{\perp}$ n'est pas régulier, on utilise souvent une approximation du système précédent. On remplace par exemple K par un potentiel K_ε régulier, pour $\varepsilon > 0$ défini par

$$K_\varepsilon := K * \rho_\varepsilon, \quad \text{avec} \quad \rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^2} \rho(\frac{x}{\varepsilon}),$$

où $\rho \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ est radiale décroissante. On définit aussi le système approché associé à K_ε.

$$\forall i = 1, \dots, N, \qquad \dot{X}_i^{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla K_\varepsilon^{\perp}(X_i^\varepsilon - X_j^\varepsilon). \tag{2}$$

2) Expliquer pourquoi K_ε atteint son minimum en $x = 0$. Justifier le fait que $\frac{\nabla \rho(x)}{x}$ est intégrable et montrer que pour tout $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, on a

$$\left\| \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int \frac{|\nabla \rho(x)|}{|x|} \, dx.$$

3) Montrer que l'énergie E_{pot} et le moment d'ordre 2 noté M_2 du système, définis par

$$E_{pot} := \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{j \neq i} K(X_i - X_j), \qquad M_2 := \frac{1}{N} \sum_i |X_i|^2,$$

1. On écrira ici qu'un vecteur est dans L^p, $W^{1,p}$ si toutes ses composantes le sont.

sont formellement préservés par le système (1) (i.e. sont constants au cours de l'évolution).
Expliquer rapidement pourquoi cela reste vrai pour le système approché avec ε, si l'on remplace K par K_ε dans la définition de l'énergie potentielle.

4) Déduire des questions précédentes que pour toute condition initiale $(X_1^0, \dots, X_N^0)$, il existe une unique solution $(X_1^\varepsilon(t), \dots, X_N^\varepsilon(t))$ globale (en temps) au système approché (2).
Montrer que les conservations obtenues à la question 3) permettent de conclure la même chose dans le cas sans approximation, si les conditions initiales sont telles que $\forall i \neq j, X_i^0 \neq X_j^0$.

II. Un modèle continu. L'équation d'Euler incompressible en dimension 2 s'écrit

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u(0) = u^0. \tag{3}$$

Le tourbillon [2] ω associé à u est défini par $\omega := \operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$.

1) Montrer que si u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, la condition $\operatorname{div} u = 0$ implique qu'il existe une fonction Φ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u = \nabla \Phi^\perp, \quad \text{c-à-d} \quad u_1 = -\partial_2 \Phi,\ u_2 = \partial_1 \Phi.$$

Montrer que $\Delta \Phi = \omega$. Pourquoi peut-on alors écrire

$$\Phi(x) := \int K(x-y)\omega(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int \ln(|x-y|)\omega(y)\, dy\,?$$

2) Montrer formellement, que si u est solution de l'équation d'Euler (3), alors ω est solution de l'équation dite de tourbillon

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \text{avec} \quad u(t,x) := \int \nabla K^\perp(x-y)\omega(y)\, dy, \quad \omega(0) = \omega^0 := \operatorname{rot} u^0. \tag{4}$$

3) On considère une solution $(X_1^\varepsilon(t), \dots, X_N^\varepsilon(t))$ une solution du système des vortex approché (2), et on définie la mesure empirique associée $\mu_N^\varepsilon(t)$ par

$$\mu_N^\varepsilon(t) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i^\varepsilon(t)}. \tag{5}$$

Montrer rigoureusement que cette mesure empirique est solution d'une version approchée de l'équation de tourbillon (4), avec ∇K remplacée par ∇K_ε.

2. On dit aussi souvent "vorticité" mais c'est un anglicisme.

Exercice 2 Un modèle "simple" de collision. On considère le tore de dimension 2 et de longueur de côté 2π : $(2\pi\mathbb{T})^2$ et des particules dans ce tore dont la vitesse à un module constant (c'est le cas par exemple des "photons"), qu'on supposera égal à 1 ici. On paramètre ces vitesses possibles par leur angle θ avec l'axe des abscisses : $v = (\cos\theta, \sin\theta)$.

On définit la fonction de répartition $f(t, x, \theta)$ de ces particules ($t \in \mathbb{R},\ x \in (2\pi\mathbb{T})^2,\ \theta \in 2\pi\mathbb{T}$), et on supposera que $f(0)$ est une probabilité, c'est-à-dire que $\int f(0, x, \theta)\, dxd\theta = 1$.

Ces particules subissent des collisions contre des obstacles, et l'on écrit pour la fonction f l'équation

$$\partial_t f + (\cos\theta, \sin\theta) \cdot \nabla_x f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x, \theta)\, d\theta - f(t, x, \theta). \tag{6}$$

On pourra utiliser la notation commode $v_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$.

I. Étude de l'équation homogène.

1) Expliquer rapidement le rôle de chaque terme dans l'équation précédente (6).

On note $g(t, \theta)$ la distribution en vitesse uniquement, définie par $g(t, \theta) := \displaystyle\int_{(2\pi\mathbb{T})^2} f(t, x, \theta)\, dx$.

2) Montrer <u>formellement</u> qu'elle vérifie l'équation (dite homogème) ci-dessous

$$\partial_t g(t, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t, \theta)\, d\theta - g(t, \theta). \tag{7}$$

3) Montrer <u>formellement</u> que la quantité totale de particules $M(t) := \int g(t, \theta)\, d\theta$ est préservée. En déduire que la solution $f(t)$ de l'équation (7) est exactement donnée par

$$g(t) = (1 - e^{-t}) g_{eq} + e^{-t} g(0)$$

où g_{eq} désigne la distribution constante uniforme : $\forall\theta \in 2\pi\mathbb{T},\ g_{eq}(\theta) := \frac{1}{2\pi}$.

4) En déduire les estimations de retour vers l'équilibre ci-dessous :

$$\|g(t) - g_{eq}\|_2 = e^{-t} \|g(0) - g_{eq}\|_2, \qquad d_{BL}(g(t), g_{eq}) = e^{-t}\, d_{BL}(g(0), g_{eq}).$$

On rappelle que d_{BL} est définie pour tout couple de mesure μ, ν sur $2\pi\mathbb{T}$ par

$$d_{BL}(\mu, \nu) := \sup_{\|\nabla\varphi\|_\infty \le 1} \left(\int \varphi(\theta)\mu(d\theta) - \int \varphi(\theta)\nu(d\theta) \right).$$

II. Étude d'une approximation sommaire de l'équation non-homogène.

On retourne maintenant à l'étude de l'équation non-homogène (6). Pour une solution f, on définit ces coefficients de Fourier $c_{m,n}$, $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$ par

$$c_{m,n}(t) := \int_{(2\pi\mathbb{T})^2} \int_0^{2\pi} f(t, x, \theta) e^{-i(m\cdot x + n\theta)} dxd\theta.$$

1) En multipliant l'équation par $e^{-i(m\cdot x+n\theta)}$ et en intégrant, montrer <u>formellement</u> que les coefficients de Fourier $c_{m,n}$ vérifient le système (infini) d'équations

$$\forall m \in \mathbb{Z}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \partial_t c_{m,n} + \frac{im_1 + m_2}{2} c_{m,n+1} + \frac{im_1 - m_2}{2} c_{m,n-1} = (\delta_0(n) - 1) c_{m,n}. \tag{8}$$

On voit que pour un $m \in \mathbb{Z}^2$ donné, les équations sur les $c_{m,n}$ pour tous les $n \in \mathbb{Z}$, ne font pas intervenir les $c_{m,n}$ avec des m différents. Il est donc intéressant d'étudier le système (8) pour un $m \in \mathbb{Z}^2$ fixé.

2) Quel système obtient-on dans le cas $m = (0,0)$? Quel lien y-a-t'il avec la partie **I** ?

3) Quel système obtient-on pour $m = (m_1, 0)$?
Dans ce cas, on va utiliser une approximation très sommaire de type Galerkin, et étudier le système en ne conservant que les coefficients pour $n = -1, 0, 1$ et en supposant que tous les autres sont nuls. On note

$$a_{-1}(t) := c_{m,-1}(t),\ a_0(t) := c_{m,0}(t),\ a_1(t) := c_{m,1}(t), \qquad A(t) := \big(a_{-1}(t), a_0(t), a_1(t)\big)^t.$$

Écrire la matrice B qui est telle qu'avec cette approximation, on ait

$$\frac{d}{dt} A(t) := -BA(t).$$

Étudier la matrice B et en déduire que

$$\|A(t)\|_2 \leq e^{-\frac{t}{2}} \|A(0)\|_2.$$

Pensez-vous que l'on peut obtenir une convergence de $A(t)$ vers zéro plus rapide qu'en $e^{-t/2}$?

4) (Si vous avez tout fini) Reprendre la question 3), dans le cas $m = (0, m_2)$.