

# Équations différentielles ordinaires et équations de transport.

## Notes de cours

Maxime Hauray

2010-2011

## 1 Introduction

### 1.1 Importance des EDO et EDT

**EDO** Les équations différentielles ordinaires sont connues depuis la Terminale. Très importantes en :

- Physique : Loi fondamentale de Newton, ..
- Chimie : Réactions chimiques...
- Biologie et écologie : Systèmes proies-prédateurs, propagations d'épidémies...

On étudiera des EDO pour des quantités à valeur dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{T}^n$ , le tore de dimension  $n$ , ou aussi  $\Omega$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Avec la fonction champ de vecteur  $b$ , cela s'écrit

$$x'(t) = b(t, x(t)) \quad \text{avec } x(0) = x_0$$

Comme nous allons utiliser des fonctions  $b$  définies seulement presque partout, on va chercher à résoudre le problème globalement, et à définir un flot  $X : \mathcal{D}_X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  ou  $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ) solution de

$$\begin{cases} X'(t, x) = b(X(t, x)) \\ X(0, x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} X'(t, s, x) = b(t, X(t, s, x)) \\ \forall s, X(s, s, x) = x \end{cases}$$

La première définition s'utilise quand le champ  $b$  est autonome, c'est-à-dire ne dépend pas du temps. La seconde dans le cas générale. Comme le cas autonome est plus simple (une seule variable de temps), on l'utilisera souvent dans les démonstration. Le cas générale demandant seulement plus d'attention mais pas d'idées nouvelles.

Le cas des fonctions localement lipschitziennes est bien connu (voir le fameux théorème de Cauchy-Lipschitz et les rappels plus loin.) Les solutions existent jusqu'à explosion, le flot peut-être correctement défini, de classe  $C^{k+1}$  si  $b$  est  $C^k$ ...

Le premier objectif de ce cours est d'introduire à la résolution d'EDO pour des champs définis seulement presque partout. Comme on le voit dans les exercices 1 et 2, cela pose tout de suite des problèmes.

### 1.2 Historique du problème

- **XVII<sup>ème</sup> siècle** : La notion de tangente apparaît, notamment chez Kepler qui cherchait à calculer la contenance d'un tonneau de vin et sera étudiée ensuite par Descartes, Roberval, Fermat...
- **1680** : Le développement du calcul infinitésimal par Leibniz et Newton (séparément) permet de généraliser le problème. Leibniz invente notamment les notations  $\int$  et  $\frac{dy}{dx}$  terriblement utiles et cherche des solutions avec des fonctions connues. Newton énonce les principes fondamentaux du mouvement qui sont une source inépuisable d'EDO et cherche des solutions sous forme de séries.
- **Début du XVIII<sup>ème</sup> siècle** : l'étude des EDO devient systématique et est ramenée à des quadratures (calculs d'intégrales).
- **1768** : Euler propose son algorithme sans se préoccuper de convergence (normal car la notion est encore mal définie à l'époque).
- **1830** : Cauchy Prouve la convergence (locale) de la méthode d'Euler avec des fonctions  $C_b^1$ .
- **1868** : Lipschitz donne la version actuelle, locale et pour les fonctions qui portent son nom.
- **1886** : Peano énonce le théorème de Cauchy-Peano-Arzela qui donne seulement l'existence si  $f$  est continue.
- **1894** Après des améliorations dues à Fuchs, Painlevé, Picard, Poincaré,... Lindenhöf donne la version actuelle du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui porte aussi pour cela le nom de théorème de Picard-Lindenhöf dans les pays anglo-saxons. Cette version utilise l'analyse fonctionnelle, les espaces de Banach et le fameux théorème de Picard.
- **1900** : Osgood énonce le lemme qui porte son nom et étend l'unicité des solutions aux fonctions satisfaisant

$$|b(x) - b(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \text{avec} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\omega(x)} = +\infty,$$

comme par exemple la fonction  $\omega(x) = x|\ln x|$ .

- **1926** : Critère de Nagumo qui donne l'unicité pour des champs singuliers en temps vérifiant

$$|t - t_0| |f(t, x) - f(t, y)| \leq |x - y|.$$

- **1960** Développement par Filippov de la théorie des inclusions différentielles qui donne des résultats d'existence pour des champs discontinus.
- **1989** DiPerna et Lions démontrent l'existence et l'unicité d'un flot global pour des champs de vecteurs  $W^{1,1}$  non compressifs. Ils résolvent d'abord les équations de transport associées.
- **2004** Ambrosio étend ce résultat aux champs  $BV$  non compressifs.
- **2008** Crippa et De Lellis donnent une preuve directe pour des champs  $W^{1,p}$ ,  $p > 1$  et toujours non compressifs.

### 1.3 Rappels dans le cas classique.

Dans cette section, on utilisera souvent l'espace des fonctions sur  $\mathbb{R}^n$  globalement (resp. localement) Lipschitziennes  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$  (resp.  $W_{loc}^{1,\infty}$ ). Remarquons que si l'on suit la définition des espaces de Sobolev :

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^\infty \text{ et } \nabla f \in L^\infty\},$$

où la dérivée est comprise au sens des distributions. Cependant, on peut montrer que cet ensemble est exactement l'ensemble des fonctions lipschitziennes (c'est le but de l'exercice 3, qui est un bon exemple d'utilisation des distributions). Beaucoup de choses sont vraies avec les distributions, et on peut aller vite sur ces points avec de l'habitude. Mais il est bon de prendre le temps de les vérifier au début pour se familiariser avec ces objets très utiles.

Les résultats énoncés ci-dessous sont valables pour des fonctions localement lipschitziennes, et intégrables en espace  $L_{t,loc}^1(W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$ . Précisons d'ailleurs ce qu'on entend par ceci car cela sera très utilisé par la suite.

**Définition 1.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Elle appartient à  $L_t^p(W_x^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$  si

i) Pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t, \cdot) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ .

ii)  $\int_{\mathbb{R}} \|f(t, \cdot)\|_{W^{1,\infty}} dt < +\infty$ .

L'indice *loc* signifie que ceci est uniquement local, et qu'il faut donc dans ce cas se restreindre à tous les compacts. Par exemple,  $f \in L_t^p(W_{x,loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$  ssi les deux conditions précédentes, avec  $\mathbb{R}^n$  remplacé par  $K$  sont vérifiées pour tout  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact.

On peut définir de manière similaire beaucoup d'autres espaces. Par exemple,  $L_t^1(L_x^2(\mathbb{R}^n))$ ,  $L_t^p(BV_x(\mathbb{R}^2))$ , ... Ils sont très utiles en EDO où l'on a toujours besoin de beaucoup moins de régularité en  $t$  qu'en  $x$  sur les champs de vecteurs.

Avant d'énoncer les théorèmes d'existence, unicité et régularité, il faut rappeler un lemme classique qui est très important dans la plupart des démonstrations des théorèmes et propositions ci-dessous.

**Lemme 1 (Grönwall).** Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  localement intégrables, alors pour toute fonction dérivable  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant

$$y'(t) \leq a(t)y(t) + b(t)$$

$$\text{on a } y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t a(s) ds} + \int_0^t e^{\int_s^t a(u) du} b(s) ds.$$

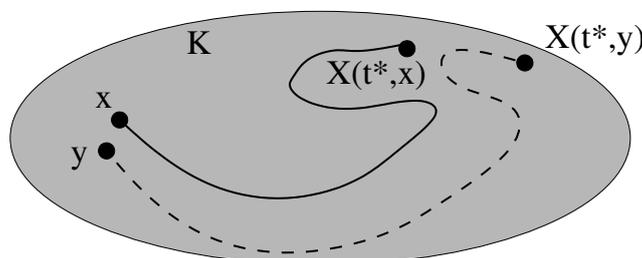
De manière plus générale, si  $y(t) \leq b(t, y(t))$  alors  $y(t) \leq \tilde{y}(t)$ , la solution de  $z' = b(t, z)$  avec condition initiale  $z(0) = y(0)$ .

Le caractère dérivable de  $y$  n'est pas essentiel. Il existe une version intégrale de ce lemme qui évite cette hypothèse. Et dans l'écriture ci-dessus, on peut toujours remplacer  $y'$  par la limite sup des accroissements  $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$  qui existe toujours. L'exercice 4 donne quelques indications pour la preuve de ce lemme.

Le lemme de Grönwall est très utile dans les démonstrations des théorèmes ci-dessous.

**Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz).** Si  $b \in L_{t,loc}^1(W_{loc}^{1,\infty})$ , alors le flot  $X$  est bien défini et localement lipschitzien sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2 \times \Omega$  contenant  $\{0\} \times \mathbb{R} \times \Omega$ .

*Preuve.* Pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz, nous renvoyons aux cours antérieurs (L3 ou M1?). Pour le caractère lipschitzien du flot, remarquons que pour une solution  $X(t, x) = X(t, 0, x)$  définie au moins jusqu'à  $t^*$ , alors on peut trouver un compact  $K$  qui contient toute la trajectoire entre 0 et  $t^*$ , avec une "sécurité" notée  $\varepsilon$ . Notons  $C_K(t)$  la constante de Lipschitz sur ce compact.



Pour une autre trajectoire partant d'un point de  $K$  (assez proche de  $x$ ), on peut écrire tant que  $X(t, y) \in K$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|X(t, x) - X(t, y)| &\leq |b(X(t, x)) - b(X(t, y))| \\ &\leq C_K(t)|X(t, x) - X(t, y)|, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $|X(t, x) - X(t, y)| \leq e^{\int_0^t C_K(s) ds} |x - y|$ .

Si on choisit  $y$  dans  $B(x, r)$  la boule de centre  $x$  et rayon  $r = \varepsilon e^{-\int_0^t C_K(s) ds}$ , on se rend compte que :

- La trajectoire partant de  $y$  reste dans  $K$  entre 0 et  $t^*$ , ce qui justifie le calcul précédent jusqu'à  $t^*$ .
- Le flot  $X(t^*, \cdot)$  est alors lipschitzien sur  $B(x, r)$  de constante  $e^{\int_0^{t^*} C_K(s) ds}$ .

□

**Proposition 1 (Cas d'Existence globale).** Si  $\frac{|b(t, x)|}{|x|}$  ou  $\frac{b(t, x) \cdot x}{|x|^2} \in L^1_{t, loc}(L^\infty)$ , alors le flot est défini sur tout  $\mathbb{R}^2 \times \Omega$ .

*Preuve.* Contentons nous d'utiliser la seconde condition plus générale. On notera  $M(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{b(t, x) \cdot x}{|x|^2}$ . Tant que la solution partant de  $(t_0, x_0)$  est définie, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|X(t, t_0, x_0)|^2 &= 2\langle b(X(t, t_0, x_0)), X(t, t_0, x_0) \rangle \\ &\leq M(t)|X(t, t_0, x_0)|^2, \end{aligned}$$

dont on déduit que  $|X(t, t_0, x_0)| \leq |x_0| e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^t M(s) ds}$ . Et le théorème de sortie de tout compact implique l'existence globale. □

**Proposition 2 (Régularité du flot).** Si  $b \in L^1_{t, loc}(W^{k, \infty}_{loc})$ , alors le flot est  $W^{k, \infty}$  par rapport à  $x$  et  $W^{1, \infty}$  par rapport à  $t$ .

Si  $b \in W^{k-1}_{t, loc}(W^{k, \infty}_{x, loc})$ , alors le flot est  $W^{k, \infty}_{t, x, loc}$ .

*Démonstration.* On va prouver seulement la première propriété dans le cas  $k = 2$  (le cas  $k = 1$  est résolu par le théorème 1). Les autres cas se traitent avec les mêmes idées mais avec des calculs beaucoup plus complexes. Pour encore simplifier la preuve, on va supposer que le champ est globalement lipschitz. Dans le cas général, il faudrait se restreindre à un compact ad-hoc. Si note  $C_1(t)$  la constante de Lipschitz du champ au temps  $t$  et  $C_2(t)$  celle de la dérivée du champ, on obtient d'après le théorème 1 que le flot  $X(t, 0, \cdot)$  est globalement lipschitzien avec une constante  $e^{\int_0^t C_1(s) ds}$ .

Prouvons maintenant son caractère  $C^1$ . Pour cela on va d'abord chercher le bon candidat pour sa dérivée. Il s'obtient formellement en dérivant l'équation différentielle : c'est la solution de l'équation différentielle linéaire (pour un  $x$  fixé)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Y(t, x) = Db(t, X(t, x))Y(t, x) \\ Y(0, x) = Id \end{cases},$$

où  $Y$  l'inconnue est une matrice  $n \times n$ . Puisque le flot  $X$  est déjà connu, c'est même un système d'équations linéaires sur les coefficients de la matrice  $Y$ . Comme  $b$  est globalement Lipschitzienne, la matrice  $Db(t, X)$  est uniformément bornée, et donc pour chaque temps  $t$  l'application  $Y \rightarrow Db(t, X(t, x))Y$  est linéaire et lipschitzienne de constante  $C_1(t)$ . On peut donc lui appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, et obtenir une solution unique qu'on notera  $Y$ . On ne sait pas encore que c'est la différentielle du flot, mais on va montrer maintenant que c'est bien le cas.

Pour  $h \in \mathbb{R}^n$ , on définit  $g(t, h) = |X(t, x+h) - X(t, x) - Y(t, x)h|$ . En dérivant par rapport à  $t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g(t, x) &\leq |b(X(t, x+h)) - b(X(t, x)) - Db(t, X(t, x))Y(t, x)h| \\ &\leq \left| \int_0^1 Db((1-t)X(t, x+h) + tX(t, x))(X(t, x+h) - X(t, x)) dt - Db(t, X(t, x))Y(t, x)h \right| \\ &\leq |X(t, x+h) - X(t, x)| \int_0^1 |Db((1-t)X(t, x+h) + tX(t, x)) - Db(X(t, x))| dt \\ &\quad + |Db(X(t, x))(X(t, x+h) - X(t, x) - Y(t, x)h)| \\ &\leq \frac{|X(t, x+h) - X(t, x)|^2}{2} C_2(t) + C_1(t)g(t, x) \\ &\leq \frac{h^2}{2} C_2(t) e^{2 \int_0^t C_1(s) ds} + C_1(t)g(t, x) \end{aligned}$$

ce qui entraîne comme  $g(0, x) = 0$  et d'après le lemme de Grönwall

$$g(t, h) \leq \frac{h^2}{2} e^{2 \int_0^t C_1(s) ds} \int_0^t C_2(s) ds$$

et donc en particulier que  $g(t, h) \underset{h \rightarrow 0}{=} O(h^2)$ , ce qui est bien le résultat recherché (obtenir la dernière inégalité à partir du lemme de Grönwall est un bon exercice). □

### 1.4 Les inclusions différentielles.

Une première solution pour traiter les cas où  $f$  n'est plus continue consiste à autoriser le champ à avoir plusieurs valeurs. On ne résout plus alors une équation différentielle, mais une *inclusion différentielle*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où  $F$  est une fonction de  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  dans  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ , l'ensemble des parties compactes de  $\mathbb{R}^d$ . Une telle fonction sera dite bornée s'il existe  $R > 0$  telle que  $\forall t, x, F(t, x) \subset B(0, R)$ . Une équation différentielle n'étant plus qu'un cas particulier d'inclusion, quand l'ensemble  $F(t, x)$  est toujours un singleton.

Ces inclusions ont intérêt très pratique, et on été étudiée dans un premier pour des équations issue de l'électronique, où des effets de seuils apparaissent souvent, une quantité pouvant brusquement passer d'une valeur à une autre, avec éventuellement des phénomènes d'hystérésis. Elle est également en mécanique pour des problèmes impliquant des frictions solides et elle est maintenant utilisée en théorie des jeux, par exemple pour le problème du chauffeur homicide. Nous n'étudierons pas cette théorie initiée, pour le côté mathématique par Filippov [3] dans les années soixante, et renvoyons par exemple au livre d'Aubin et Cellina [1] sur le sujet disponible en bibliothèque. Mais nous citerons quand-même deux résultats qui montrent l'intérêt de cette théorie.

**Théorème 2.** *Si la fonction  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  est semi-continue supérieurement (au sens de la distance de Hausdorff sur  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$ ), bornée et à valeurs dans les convexes compacts, alors il existe toujours une solution au problème (1.1).*

La distance de Hausdorff est définie à l'exercice 5.

*Preuve.* Nous ne donnerons pas la preuve de ce théorème. Mentionons juste qu'elle utilise des arguments similaires à ceux utilisés pour prouver la convergence de la méthode d'Euler. On construit des fonctions affines par morceaux suivant cette méthode et passe ensuite à la limite grâce au théorème d'Ascoli ( $F$  est bornée). Les hypothèses de semi-continuité, et de convexité permettent d'obtenir ainsi une solution du problème. □

**Proposition 3.** *Si la fonction  $F$  vérifie de plus sur tout compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ , il existe une fonction  $C_K(t)$  localement intégrable en temps*

$$\forall t, \forall x, y \in K, \forall v_x \in F(t, x), \forall v_y \in F(t, y), \langle v_x - v_y, x - y \rangle \leq C_K(t)|x - y|^2$$

alors le problème (1.1) ne possède au plus qu'une solution.

*Preuve de la proposition 3.* La preuve très simple et similaire à celle de l'existence globale dans le cas Lipschitzien. On prend  $X$  et  $Y$  deux solutions, qui au moins pendant un intervalle de temps  $[0, T]$  restent dans un compact  $K$ . On peut alors écrire pour  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|X(t) - Y(t)|^2 &= \langle X'(t) - Y'(t), X(t) - Y(t) \rangle \\ &= \langle v_{X(t)} - v_{Y(t)}, X(t) - Y(t) \rangle \\ &\leq C_K(t)|X(t) - Y(t)|^2, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|X(t) - Y(t)| \leq |Y(0) - X(0)| e^{\frac{1}{2} \int_0^t C_K(s) ds},$$

dont on peut déduire l'unicité. □

**Exemple** Sur  $\mathbb{R}^2$ , on définit les vecteurs  $v_- = (1, 2)$  et  $v_+ = (-1, 2)$ . Ensuite on définit la fonction  $F$  par

$$F(t, x_1, x_2) = \begin{cases} v_- & \text{si } x_1 < 0 \\ v_+ & \text{si } x_1 > 0 \\ [v_-, v_+] & \text{si } x_1 = 0 \end{cases} .$$

$[v_-, v_+]$  désigne le segment de  $\mathbb{R}^2$ . Montrer que ce champ vérifie les hypothèses du théorème et de la proposition précédente. Quelle est alors l'unique solution si la condition initiale se trouve sur l'axe des réels ?

Le critère est-il toujours vérifié si l'on définit  $v_+ = (-1, -3)$  ? Y a-t-il toujours unicité ?

**Application à l'existence de solution dans un cadre très général.**

Si  $b$  est une fonction  $L^1_{loc} \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ , on peut appliquer ce qui précède à la fonction

$$F_b(t, x) = \overline{\text{Conv ess } a(t, x)}$$

où l'enveloppe convexe essentielle est définie par

$$\text{Conv ess } a(t, x) := \bigcap_{r>0} \bigcap_{N, \lambda(N)=0} \text{Conv}\{a(t, x) \mid x \in B(x, r) \setminus N\}$$

On peut montrer (voir l'exercice 6) que la fonction  $F_b$  ainsi définie vérifie bien les hypothèses du Théorème de Filippov. Cela montre donc l'existence de solution en un sens certes bien particulier, mais qui coïncide avec la définition usuelle dans le cas d'un champ continu.

## 2 EDO et EDT avec coefficients $W^{1,p}$ , $p > 1$ .

On a déjà traité en introduction la difficulté qui se pose lorsque les champs ne sont plus définis presque partout : En changeant le champ sur un ensemble de mesure nulle, on peut construire de nombreux flots solutions. On va montrer dans cette partie comment choisir un unique flot, celui qui en général nous intéresse le plus. Avant d'en venir aux nouveaux théorèmes d'existence et d'unicité de flots solutions de l'EDO, il nous faut présenter les résultats dont nous aurons besoin. Le théorème principal que nous énoncerons ensuite est dû à C. De Lellis et G. Crippa. Pour plus de détails sur le sujet, une bonne référence est la thèse publiée de Crippa [2].

### 2.1 Fonctions maximales

**Définition 2 (Fonctions maximales).** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , on définit ses fonctions maximales associées  $M_R f$ , pour  $R \in (0, +\infty]$  par

$$M_R f(x) := \sup_{0 < r \leq R} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad (2.1)$$

où la notation  $f_B = \frac{1}{\lambda(B)} \int_B$  désigne la valeur moyenne. Pour  $R = +\infty$ , on écrit aussi  $Mf = M_\infty f$ .

Quelques propriétés :

- $M_R(\alpha f) = |\alpha| M_R f$ .
- $M_R(f + g) \leq M_R f + M_R g$
- Pour toute fonction  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  décroissante, s'annulant pour  $x > R$  et telle que  $\int_{\mathbb{R}^n} g(|z|) dz = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-z)| g(|z|) dz = (f * g)(x) \leq M_R f(x) \quad (2.2)$$

Cela se montre d'abord pour des fonctions  $g$  constantes par morceaux en additionnant des contributions de boules de différents diamètres.

**Théorème 3.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Si  $f \in L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  alors  $Mf$  est fini presque partout.
- (b) Si  $f \in L^1$ , alors pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\lambda(\{x : Mf(x) > \alpha\}) \leq \frac{3^n}{\alpha} \|f\|_1$$

- (c) Si  $f \in L^p$ ,  $1 < p \leq \infty$ , alors  $Mf \in L^p$  et :

$$\|Mf\|_p \leq \left(3^n 2^p \frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

**Remarque 1.** Le point (b) signifie que la fonction  $Mf$  est  $L^1$  faible. On définit la norme  $L^1$  faible par

$$\|g\|_{1,f} := \sup_{\alpha > 0} \alpha \lambda(\{x : Mf(x) > \alpha\}).$$

Donc le point (b) pourrait se traduire par  $\|Mf\|_{1,f} \leq 3^n \|f\|_1$

Pour les fonctions maximales  $M_R$ , il est possible de donner des résultats locaux. Les résultats sur  $M_R f$  sur  $\Omega$  dépendront de  $f$  sur  $\Omega_{3R} = \{x : d(x, \Omega) < 3R\}$ . Par exemple dans l'inégalité du point (c) on écrira  $\|Mf\|_{p,\Omega} \leq C_{p,n} \|f\|_{p,\Omega_{3R}}$ .

La démonstration de ce théorème utilise le lemme de recouvrement suivant, qui est une version finie du Lemme plus général de Vitali.

**Lemme 2 (Lemme de recouvrement de Vitali).** Soit  $E$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$  qui est la réunion d'une collection finie de balles  $\{B_i : i \leq m\}$ . Alors on peut extraire une sous-collection disjointe  $B_1, \dots, B_k$  parmi les  $\{B_i : i \leq m\}$  telle que

$$\sum_{j=1}^k \lambda(B_j) \geq 3^{-n} \lambda(E)$$

*Preuve du lemme 2.* On choisit la boule  $B_1$  de plus grand rayon, puis  $B_2$  la boule de plus grand rayon parmi celles qui n'intersectent pas  $B_1$  et on continue ainsi de suite jusqu'à épuisement des possibilités. On obtient ainsi  $k$  boules  $B_1, \dots, B_k$ . À chacune de ces boules on associe la boule  $\tilde{B}_j$  obtenue en gardant le même centre et en triplant le rayon. Alors

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \subset \bigcup_{j=1}^k \tilde{B}_j$$

En effet, si une boule  $B_i$  n'apparaît pas dans la sous-sélection, c'est qu'elle intersecte une boule  $B_j$  de rayon plus grand, ce qui implique que  $B_i \subset \tilde{B}_j$ . On a donc

$$\sum_{j=1}^k 3^n \lambda(B_j) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n \tilde{B}_i\right) \geq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \geq \lambda(E).$$

□

*Preuve du théorème 3.* Prouvons d'abord le point (b). On pose  $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ , et on choisit  $E \subset E_\alpha$  compact. Pour tout  $x \in E_\alpha$ , on peut choisir une boule  $B_x$  contenant  $x$  telle que

$$\lambda(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy \tag{2.3}$$

Grâce à la compacité de  $E$ , on peut choisir un nombre fini de ces boules qui recouvrent  $E$ . Et grâce au lemme 2 on peut encore extraire  $m$  boules disjointes  $B_1, \dots, B_m$  telles que  $\lambda(E) \leq 3^n \sum_{k=1}^m \lambda(B_k)$ . Ce qui implique

$$\mu(E) < \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

On obtient le point (b) en prenant le supremum sur tous les  $E \subset E_\alpha$ .

Le point (b) nous dit donc que  $M : L^1 \rightarrow L^1_f$  est continue. Il est aussi vrai que  $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ , c-à-d que  $M : L^\infty \rightarrow L^\infty$  est continue. Le résultat (c) va en découler grâce à un procédé d'interpolation.

**Seconde étape : Interpolation.** Soit  $f \in L^p, 1 < p < \infty$ . Pour  $\alpha > 0$ , on sépare  $f$  en 2 parties, une bornée  $f_1$ , et l'autre  $f_2$  dans  $L^1$  définies par

$$f_1 = f(1 - \chi_E), \quad f_2 = f\chi_E$$

avec  $\chi$  désigne la fonction caractéristique et  $E = \{x : f(x) > \frac{\alpha}{2}\}$ . On a donc  $Mf_1 \leq \frac{\alpha}{2}$  et  $Mf \leq Mf_2 + Mf_1$ , ce qui implique  $\{Mf > \alpha\} \subset \{Mf_2(x) > \frac{\alpha}{2}\}$ . D'après le point (b), on peut déduire que

$$\lambda(x : Mf(x) > \alpha) \leq 2 \frac{3^n}{\alpha} \int_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| dx$$

D'autre part, on peut démontrer (exercice) que

$$\int (Mf(x))^p dx = p \int_0^\infty \lambda(\{Mf > \alpha\}) \alpha^{p-1} d\alpha. \tag{2.4}$$

Et d'après l'inégalité précédente, on peut majorer cela par

$$3^n 2^p \int_0^\infty \left( \int_{\{|f| \geq \frac{\alpha}{2}\}} |f(x)| dx \right) \alpha^{p-2} d\alpha = 3^n 2^p \int_0^\infty \left( \int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha \right) |f(x)| dx = 3^n 2^p \frac{p}{p-1} \|f\|_p^p,$$

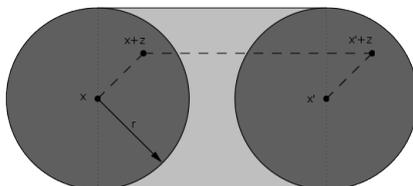
ce qui implique le point (c). □

## 2.2 Un nouveau théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis,

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty |x - y|$$

valable pour les fonctions lipschitziennes, est très utile dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. Mais il n'est plus utilisable avec des fonctions  $W^{1,p}$  (définies seulement presque partout). Y'a-t-il un moyen de le remplacer? Oui, en utilisant le dessin ci-dessous.



Au lieu de considérer un seul chemin entre deux points  $x$  et  $x'$ , on va choisir une famille de chemin. De  $x$ , on passe à  $z$ , point de la boule de centre  $x$ , et rayon  $r$ , puis on se translate de  $\vec{xx'}$  pour arriver en  $z'$ , d'où on repare vers  $x'$ . En faisant cela pour tout point  $z$  de la boule  $B(x, r)$ , on obtient la propriété ci-dessous.

**Proposition 4.** *Soit  $f$  une fonction  $W^{1,1}$ . Alors pour presque tous points  $x, x'$*

$$|f(x) - f(x')| \leq (2^{n-1} + 1)(M(Df)(x) + M(Df)(x'))|x - x'| \quad (2.5)$$

Et l'inégalité est encore vraie si l'on remplace  $M(Df)$  par  $M_{|x-x'|}$ .

*Preuve de la proposition 4.* Comme souvent en analyse, on va d'abord démontrer le résultat pour des fonctions suffisamment régulières pour que tout soit bien défini (ici  $C^1$  convient). Quand cela sera fait, on raisonnera par densité, en approchant une fonction  $f \in W^{1,1}$  par convolution. On choisit  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  radiale,  $C^\infty$  et à support dans  $B(0, 1)$ , puis on définit  $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  et  $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$ . Le théorème de Lebesgue nous dit que pour presque tout  $x$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x)$ . Pour les fonctions maximales, on pourra remarquer que  $\int_B(Df_\varepsilon)$  est toujours une moyenne de  $f$ , mais avec un profil radial décroissant et que donc  $M_R(Df_\varepsilon)(x) \leq M_{R+\varepsilon}(Df)(x)$ . Cela permet alors d'en déduire le cas général par passage à la limite.

Pour montrer le résultat avec  $f \in C^1$ , on écrit d'abord en utilisant les notations du dessin que

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= (f(x) - f(x+z)) + (f(x+z) - f(x'+z)) + (f(x'+z) - f(x')) \\ &= - \int_0^1 Df(x+tz)z dt + \left( \int_0^1 Df((1-t)x+tx'+z) dt \right) (x-x') + \int_0^1 Df(x'+tz)z dt \end{aligned}$$

Et en faisant la moyenne sur tous les  $z$  de  $B(x, r)$  on obtient après changements de variables et en utilisant des inclusions entre diverses boules :

$$\begin{aligned} f(x) - f(x') &= - \int_0^1 \left( \int_{B(0, tr)} Df(x+z) \frac{z}{t} dz \right) dt + \left( \int_0^1 \int_{B((1-t)x+tx', r)} Df dt \right) (x-x') + \int_0^1 \left( \int_{B(0, tr)} Df(x'+z) \frac{z}{t} dz \right) dt \\ |f(x) - f(x')| &\leq r M_r(Df)(x) + \frac{|x-x'|}{2} \left( 1 + \frac{|x-x'|}{2r} \right)^n \left( M_{r+\frac{|x-x'|}{2}}(Df)(x) + M_{r+\frac{|x-x'|}{2}}(Df)(x') \right) + r M_r(Df)(x') \\ &\leq \left( r + \frac{|x-x'|}{2} \left( 1 + \frac{|x-x'|}{2r} \right)^n \right) \left( M_{r+\frac{|x-x'|}{2}}(Df)(x) + M_{r+\frac{|x-x'|}{2}}(Df)(x') \right) \end{aligned}$$

Avec le choix particulier  $r = \frac{|x-x'|}{2}$ , on obtient le résultat annoncé.  $\square$

On a donc une inégalité qui ressemble au théorème des accroissements finis. Avec la différence importante que le terme devant le  $|x-x'|$  dépend de  $x$  et  $x'$  et qu'on ne peut le borner uniformément. On ne peut avoir que des estimations globales ( $L^p, p < \infty$ ) sur ce terme. Cela nous oblige à utiliser un "nouveau lemme de Gronwall".

### 2.3 Quelques préliminaires utiles d'intégration.

**Définition 3 (Mesures images).** *Si  $T$  est une application  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors  $T_\# \lambda$  la mesure image par l'application  $x \rightarrow T$  de la mesure de Lebesgue  $\lambda$ . Cette mesure est définie pour tout ensemble mesurable de  $A \subset \mathbb{R}^n$  par*

$$X_i(t)_\# \lambda(A) = \lambda(X_i(t)^{-1}(A))$$

Pour comprendre cette notion, il faut imaginer que la mesure  $\lambda$  est une distribution de masse que l'on déplace par l'application  $T$ . La nouvelle distribution de masse est alors donnée par la mesure image  $T_\# \lambda$ . Cela se voit mieux si on écrit moins rigoureusement que  $X_\# \lambda(X(A)) = \lambda(A)$ , pour un ensemble  $A$  du départ.

La mesure image vérifie aussi pour toute fonction  $f$  intégrable

$$\int f(X_i(t, x)) dx = \int f(y) d(X_i(t)_\# \lambda)(y).$$

Dans le cas où  $f$  est la fonction caractéristique d'un ensemble, cela correspond exactement à sa définition. Le résultat général s'en déduit par convergence monotone sur des combinaisons linéaires de fonctions convexes. En particulier, si  $X$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, alors la mesure image de celle de Lebesgue  $dx$  est la mesure de densité  $\frac{dy}{|J(X^{-1})(y)|}$ , où  $J$  désigne le Jacobien, c'est-à-dire le déterminant de la matrice Jacobienne  $DX$ .

Pour quelques exemples de calculs de mesures images, voir l'exercice 7.

**Proposition 5 (Formule de Jensen).** *Si  $f$  est une fonction intégrable sur  $X$ ,  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $X$  et  $J$  est une fonction convexe, alors*

$$J \left( \int f(x) d\mu(x) \right) \leq \int J(f(x)) d\mu(x)$$

## 2.4 Un remplaçant global du lemme de Grönwall

Le lemme suivant va prendre la place du lemme de Grönwall dans la prochaine preuve d'existence et d'unicité. La condition dite de *quasi-incompressibilité* joue un rôle très important que l'on essaiera d'expliquer ci-dessous.

**Lemme 3 (en remplacement du lemme de Grönwall).** *Soit  $T > 0$ . Supposons que  $X_1$  et  $X_2$  sont deux applications de  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant*

- Pour p.p.  $x$ , pour tout  $t$ ,  $X_i(t, x) = x + \int_0^t b(t, X_i(s, x)) ds$
- Pour  $t \in [0, T]$ ,  $X_i(t)_{\#}\lambda \leq L_T \lambda$ . (condition de quasi-incompressibilité)

Alors pour tout  $r > 0$ ,

$$\int \ln \left( 1 + \frac{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|}{r} \right) dx - \int \ln \left( 1 + \frac{|X_1(0, x) - X_2(0, x)|}{r} \right) dx \leq 2L_T \|M(Db)\|_1 t$$

Et si les deux flots  $X_i$  sont associées à des champs  $b_i$ , alors on a

$$\int \ln \left( 1 + \frac{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|}{r} \right) dx - \int \ln \left( 1 + \frac{|X_1(0, x) - X_2(0, x)|}{r} \right) dx \leq \left( \frac{\|b_1 - b_2\|_1}{r} + 2\|M(Db_2)\|_1 \right) L_T t$$

Il n'est pas demandé dans ce lemme que les deux flots vérifient la condition initiale  $X_i(t, x) = x$ . C'est normal car on va aussi utiliser ce lemme en modifiant légèrement les conditions initiales.

Quel est le rapport avec le lemme de Grönwall ? La formulation n'est pas la même, mais si on se replace sous l'hypothèse  $b \in W^{1, \infty}$ , alors on pourrait écrire le lemme de Gronwall

$$\ln \left( 1 + \frac{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|}{r} \right) - \ln \left( 1 + \frac{|X_1(0, x) - X_2(0, x)|}{r} \right) \leq \|Db\|_{\infty} t,$$

ce que l'on a beaucoup plus intérêt à écrire avec des exponentielles. En notant  $h(t) = |X_1(t, x) - X_2(t, x)|$ , cela donne  $1 + \frac{h(t)}{r} \leq \left( 1 + \frac{h(0)}{r} \right) e^{\|Db\|_{\infty} t}$ . On obtient le plus classique  $h(t) \leq h(0)e^{\|Db\|_{\infty} t}$  en prenant la limite quand  $r \rightarrow 0$ .

*Preuve du lemme 3.* On se place dans le cas plus général où il y a deux champs de vecteurs  $b_1$  et  $b_2$ . On pose

$$Q(t) = \int \ln \left( 1 + \frac{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|}{r} \right) dx$$

et on dérive formellement. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(t) &\leq \int \frac{|b_1(t, X_1(t, x)) - b_2(t, X_2(t, x))|}{r + |X_1(t, x) - X_2(t, x)|} dx \\ &\leq \int \frac{|b_1(t, X_1(t, x)) - b_2(t, X_1(t, x))|}{r} dx + \int \frac{r + |b_2(t, X_1(t, x)) - b_2(t, X_2(t, x))|}{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|} dx \\ &\leq \frac{L_T}{r} \|b_1 - b_2\|_1 + \int [M(Db(t, \cdot))(X_1(t, x)) + M(Db(t, \cdot))(X_2(t, x))] dx \\ &\leq \frac{L_T}{r} \|b_1 - b_2\|_1 + \int M(Db(t, \cdot)) dX_{1\#}\lambda + \int M(Db(t, \cdot)) dX_{2\#}\lambda \\ &\leq \frac{L_T}{r} \|b_1 - b_2\|_1 + 2L_T \|M(Db)\|_1, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition 4 à la ligne 2 et l'hypothèses sur les mesures images à la dernière ligne. Ce qui implique le résultat annoncé.  $\square$

Le ln sous l'intégrale est très important. Si on essaie d'estimer une autre quantité comme

$$R(t) = \|X_1(t, \cdot) - X_2(t, \cdot)\|_1 = \int |X_1(t, x) - X_2(t, x)| dx,$$

de la même manière, on obtient

$$R'(t) \leq \int [M(Db(t, \cdot))(X_1) + M(Db(t, \cdot))(X_2)] |X_1 - X_2| dx.$$

On peut toujours utiliser l'inégalité de Hölder dans le produit, mais si on veut obtenir une inégalité différentielle sur  $\|X_1 - X_2\|_1$ , il faut prendre  $q = 1$ , et donc  $p = +\infty$ . C'est-à-dire qu'on ne peut estimer cette quantité que dans le cas classique des champs lipschitziens. Le ln qui fait disparaître le produit est donc très utile.

## 2.5 Sur la condition de quasi-incompressibilité

La condition de quasi-compressibilité est indispensable pour obtenir l'unicité d'un flot solution, comme le montre l'exemple de l'exercice 1. Si on change un champ  $b$  défini sur  $\mathbb{R}$  en un seul point, on peut obtenir de nombreux flots différents. Mais on peut remarquer que sur cet exemple il n'y a qu'un seul flot qui vérifie la condition d'incompressibilité. Pour tous les autres des Dirac apparaissent dans la mesure image (voir exercice).

### Quasi-incompressibilité dans le cas régulier

Dans le cas régulier, la mesure image qui nous intéresse est continue par rapport à la mesure de Lebesgue et sa densité est

$$dX(t)_{\#}\lambda = \frac{dx}{|JX(t, X(-t, x))|}.$$

On peut obtenir des estimations sur le Jacobien grâce à l'équation qu'il vérifie :

**Proposition 6.** *Soit  $X$  le flot associée au champ  $b(t, x) \in L_t^1(W^{1,\infty})$ . Le Jacobien de ce flot vérifie l'équation*

$$\frac{d}{dt}JX(t, x) = J(t, x) \operatorname{div} b(X(t, x))$$

et il est quasi-incompressible avec la constante

$$L_T := e^{\int_0^T \|(\operatorname{div} b)^-(t, \cdot)\|_{\infty} dt}$$

*Démonstration.* Dans cette preuve on va supposer que le champ  $b$  est autonome (ne dépend pas du temps), ce qui va simplifier les notations.

Rappelons d'abord que  $DX$  vérifie l'EDO

$$\frac{d}{dt}DX(t, x) = Db(X(t, x))DX(t, x).$$

avec la condition initiale  $DX_{\varepsilon}(0, x) = Id$ . Pour passer au déterminant, il faut connaître la dérivée de celui-ci. L'expression est plus simple lorsqu'on se place en une matrice inversible  $A$ .

$$\det(A + H) \underset{H \rightarrow 0}{=} \det A + (\det A) \operatorname{Tr}(HA^{-1}) + o(H)$$

Si on utilise cela à  $t = 0$  dans l'EDO ci-dessus, on obtient

$$\frac{d}{dt}JX(t, x) = JX(t, x) \operatorname{Tr}(Db(X(t, x))DX(t, x)DX(t, x)^{-1}) = \operatorname{div} b(X(t, x))$$

On peut aussi utiliser le fait que le flot  $X$  est un groupe de transformation à un paramètre, c'est-à-dire que l'application  $t \mapsto X(t, \cdot)$  est un morphisme de groupe entre  $(\mathbb{R}, +)$  et le groupe des difféomorphismes  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même (muni de la composition). Ou encore que

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, X(t + s, x) = X(s, X(t, x))$$

Grâce à l'EDO obtenue pour  $JX$ , on peut écrire  $JX(t, x) = e^{\int_0^t \operatorname{div} b(X(s, x)) ds}$

et obtenir la borne par le bas nécessaire  $JX(t, x) \geq e^{-\int_0^t \|(\operatorname{div} b)^-(s, \cdot)\|_{\infty} ds} := \frac{1}{L_T}$

où l'exposant moins désigne la partie négative  $a^- = \max(0, -a)$ . □

## 2.6 Un résultat d'existence et d'unicité du flot

Ce nouveau lemme de Grönwall va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4 (Di Perna-Lions '89, Crippa-De Lellis '08 pour cette méthode).** *Soit  $b$  un champ de vecteur dans  $L_{loc}^1(\mathbb{R}, W^{1,p}(\mathbb{T}^n))$  dont la partie négative de la divergence vérifie  $(\operatorname{div} b)^- \in L_{loc}^1(\mathbb{R}, L^{\infty})$ . Alors il existe un unique flot  $X : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  quasi-incompressible défini presque partout vérifiant :*

i) a.e. in  $x$ , pour tout  $t \geq 0$ ,  $X(t, x) = x + \int_0^t b(s, X(s, x)) ds$ .

ii) Pour tout  $T > 0$ , il existe  $L_T$  tel que  $X_i(t)_{\#}\lambda \leq L_T \lambda$ , si  $t \in [0, T]$ .

Pour remplacer  $\mathbb{T}^n$  par  $\mathbb{R}^n$ , il faut ajouter les conditions de croissance à l'infini  $\frac{b(x)}{|x|} \in L^1(L^{\infty}) + L^1(L^1)$  pour éviter des explosions en temps finis. Sur un domaine borné avec bord régulier, il faut supposer que le gradient est tangent au bord (ou définir le temps de sortie).

La démonstration de l'existence va utiliser le critère de compacité de Riesz-Fréchet-Kolmogorov (RFK dans la suite).

**Lemme 4 ( Critère de compacité de Riesz-Fréchet-Kolmogorov ).** Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (ou  $L^p(\mathbb{T}^n)$ ). Supposons que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(\cdot + h) - f_n\|_p = 0.$$

Alors la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est compacte dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* La démonstration utilise une régularisation par convolution. On choisit un noyau de convolution  $\rho$  à support compact et définit  $\rho_m(x) = m^n \rho(mx)$  ainsi que  $f_{n,m} = f_n * \rho_m$ . Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, la suite  $(f_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$  est compacte d'après le Théorème d'Arzelà-Ascoli car ses dérivées sont uniformément bornées. On peut donc par un procédé diagonal extraire une sous-suite telle que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la suite  $f_{\varphi(n),m}$  converge vers une fonction  $f_m \in L^p$ . D'autre part, comme la convolution effectue des moyennes des  $f_n$  sur des petites boules, le critère du lemme implique que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_{n,m} - f_n\|_p = 0,$$

et un résultat similaire pour  $\|f_{n,m} - f_{n,m'}\|_p$ . Le sup en  $n$  permet de passer à la limite, et de conclure que la suite des limites  $(f_{m^{-1}})_{m \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy donc convergente dans notre espace complet. Sa limite  $f$  est aussi la limite de la suite  $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  (car...?).  $\square$

On peut maintenant se lancer dans la démonstration du théorème 4.

*Démonstration du Théorème 4. Unicité :* On commence par la partie la plus facile. Supposons que deux flots  $X_1$  et  $X_2$  vérifient les conditions du théorème. On peut alors appliquer le remplaçant 3 du lemme de Gronwall et obtenir pour tout  $r > 0$  et  $t \leq T$

$$\int \ln \left( 1 + \frac{|X_1(t, x) - X_2(t, x)|}{r} \right) dx \leq 2L_T \|M(Db)\|_1 t$$

en faisant tendre  $r$  vers 0 on obtient que pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_1(t, x) = X_2(t, x)$  pour presque tout  $x$ .

*Existence :* Comme très souvent en EDP, on va raisonner par approximation et utiliser ce que l'on sait dans le cas régulier. On commence donc par convoluer  $b$  par notre noyau de convolution  $\rho_\varepsilon$  préféré pour obtenir un  $b_\varepsilon$  régulier, qui admet d'après la théorie classique un unique flot que l'on note  $X_\varepsilon$ . Il nous reste à montrer que la suite des  $(X_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est compact pour obtenir une sous-suite convergente, et ensuite à montrer que la limite est bien un flot solution. On va utiliser le lemme de Grönwall global 3 pour montrer qu'on peut utiliser le critère RFK 4, mais avant il faut montrer que les flots  $X_\varepsilon$  sont uniformément quasi-incompressibles, c'est-à-dire qu'il existe des constantes  $L_T, T \geq 0$  telles que

$$X_\varepsilon(t) \# \lambda \leq L_T \lambda, \text{ si } t \in [0, T].$$

Or, la Proposition 6, donne pour un  $\varepsilon$  fixé une constante  $L_{T,\varepsilon}$  qui convient. Mais comme  $\sup_{\varepsilon > 0} \|(\operatorname{div} b_\varepsilon)^-(t, \cdot)\|_\infty = \|(\operatorname{div} b)^-(t, \cdot)\|_\infty$ , on voit que la constante

$$L_T := e^{\int_0^T \|(\operatorname{div} b)^-(t, \cdot)\|_\infty dt}$$

convient pour tous les flots  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . On va maintenant appliquer le nouveau lemme de Grönwall 3, entre le flot  $X_\varepsilon$  et ce même flot "shifté" de  $h$ , désigné par  $Y_\varepsilon$ , pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ . Précisément,  $Y_\varepsilon$  est défini par

$$\begin{cases} Y'_\varepsilon(t, x) = b(Y_\varepsilon(t, x)) \\ Y_\varepsilon(0, x) = x + h \end{cases}.$$

On obtient alors (en prenant  $r = |h|$  dans le lemme) l'estimation

$$\int \ln \left( 1 + \frac{|X_\varepsilon(t, x) - Y_\varepsilon(t, x)|}{r} \right) dx - \ln 2 \leq 2L_T \|M(Db_\varepsilon)\|_1 t \leq 2L_T \|M(Db)\|_1 t.$$

Comme on travaille sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , on a toujours  $|X_\varepsilon - Y_\varepsilon| \leq 1$ . Et comme  $\ln$  est concave, on a pour  $y \in [0, 1]$ ,  $\ln \left( 1 + \frac{y}{|h|} \right) \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{|h|} \right)$ . Cette inégalité permet de déduire que

$$\|X_\varepsilon(t, \cdot) - X_\varepsilon(t, \cdot + h)\|_1 \leq \frac{\ln 2 + 2L_T \|M(Db)\|_1 T}{\ln \left( 1 + \frac{1}{|h|} \right)} := \alpha_T(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

D'après le critère RFK 4, l'ensemble  $\mathcal{F}_\alpha$  des applications  $f$  de  $\mathbb{T}^n$  dans  $\mathbb{T}^n$  qui vérifient  $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \leq \alpha_T(h)$  est un compact. On a donc une famille d'applications  $X_\varepsilon(t, \cdot)$  de  $[0, T]$  dans  $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n)$  qui est :

– uniformément absolument continue car

$$|X_\varepsilon(t, \cdot) - X_\varepsilon(s, \cdot)| \leq \int_s^t \|b(u, X_\varepsilon(u, \cdot))\|_1 du \leq L_T \int_s^t \|b(u, \cdot)\|_1 du$$

– à valeur dans un compact de  $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n)$ .

D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, on peut-en déduire que la famille  $(X_\varepsilon)$  est compacte et donc en extraire une sous-suite  $(X_{\varepsilon'})$  qui converge vers un  $X(t, \cdot)$  pour la norme de  $\mathcal{C}([0, T], L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n))$ . Cela implique la convergence au sens de la norme  $L^1([0, T] \times \mathbb{T}^n, \mathbb{T}^n)$ , et donc quitte à extraire encore une sous-suite, on peut en déduire que la convergence est simple :

$$\text{Pour presque tous } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{T}^n, X_{\varepsilon'}(t, x) \longrightarrow X(t, x).$$

En utilisant la convergence dominée, on obtient que  $X$  vérifie la condition de quasi-incompressibilité. En effet, pour une fonction  $f$  bornée et régulière, on aura pour presque tout  $t$

$$L_T \|f\|_1 \geq \int f(X_{\varepsilon'}(t, x)) dx \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} \int f(X(t, x)) dx.$$

ce qui implique la quasi-incompressibilité.

Pour montrer que  $X$  vérifie l'équation, il faut passer à la limite dans

$$X_{\varepsilon'}(t, x) = x + \int_0^t b_{\varepsilon'}(s, X_{\varepsilon'}(s, x)) ds$$

Une première étape est d'écrire grâce à la quasi-incompressibilité et pour un champ  $\bar{b}$  régulier qui approche  $b$  en norme  $L^1$

$$X_{\varepsilon'}(t, x) = x + \int_0^t \bar{b}(s, X_{\varepsilon'}(s, x)) ds + O(\|\bar{b} - b_{\varepsilon'}\|_1)$$

Ensuite, si  $\varepsilon'$  est choisi suffisamment petit, le terme défini par l'intégrale sera proche (en norme  $L^1$ ) de  $\int_0^t \bar{b}(s, X(t, x)) ds$ , lui-même proche de  $\int_0^t b(s, X(t, x)) ds$ . Cela permet de passer à la limite dans l'équation, (en norme  $L^1$  ou presque partout (C'est un bon exercice de rendre ce raisonnement rigoureux).  $\square$

### 3 Exercices

#### Exercice 1. Non-unicité du flot pour des champ définis p.p..

On définit sur  $\mathbb{R}$  deux champs de vecteurs  $b_1$  et  $b_2$  par

$$b_1(x) = 1, \quad b_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner les solutions de l'équation  $x' = b_1(x)$ . Trouver le flot  $X_1$  associé au champ  $b_1$ .
2. Pour le deuxième champ  $b_2$ , on écrit le problème sous forme intégrale  $x(t) = x_0 + \int_0^t b_2(x(s)) ds$ . Montrer que le flot obtenu pour  $b_1$  est encore valable pour  $b_2$ .
3. Montrer qu'il existe en fait beaucoup d'autres flots associées à  $b_2$ , qui vérifient l'équation sous forme intégrale (On peut s'arrêter en 0 puis éventuellement repartir). Parmi ces derniers, trouver le seul flot qu'on notera  $X_2$  qui vérifie la condition de semi-groupe :  $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, X(s, X(t, \cdot)) = X(s+t, \cdot)$ .

#### Exercice 2. Points de Lebesgue.

On sait (c'est un résultat de Lebesgue) que pour une fonction intégrable localement sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\text{p.p. } x \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0,$$

avec la notation  $f_V = \frac{1}{|V|} \int_V$  et  $|\cdot|$  pour la mesure de Lebesgue. Les points où ceci est vérifié sont les *points de Lebesgue* de  $f$ .

- 1) Dans l'exo 1, quel est le représentant qui contient le plus de points de Lebesgue ?
- 2) Pour la fonction  $H_r$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{x}{|x|} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ e_1 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

où  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ , calculer le flot associé. Trouver la fonction  $\bar{H}$  égale à  $H$  presque partout qui a le plus de points de Lebesgue et calculer le flot associé. Pour  $t$  fixé les deux flots sont-ils égaux presque partout ?

- 3) Trouvez une fonction intégrable dont au moins un point n'est pas de Lebesgue.

**Exercice 3.  $W^{1,\infty}$  est l'ensemble des fonctions lipschitziennes.**

Le but de cet exercice est de démontrer que

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^\infty \text{ et } \nabla f \in L^\infty\},$$

coïncide bien avec l'ensemble des fonctions lipschitziennes.

Partons d'abord d'une fonction  $f$  dans l'espace  $W^{1,\infty}$  définie au sens de Sobolev. Nous allons montrer que cette fonction est lipschitzienne, de constante  $\|\nabla f\|_\infty$ .

1. Le premier problème est que nous partons pour l'instant d'une fonction  $f$  définie presque partout. Il faut donc d'abord trouver le bon représentant de sa classe dont on montrera ensuite qu'il est lipschitzien. Pour cela, on peut utiliser les points de Lebesgue. Et définir, pour une fonction  $\phi$ , régulière, à support dans la boule unité, et d'intégrale 1 :

$$f_\varepsilon(x) = \int f(y) \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy$$

- (a) Pour un champ de vecteur  $\vec{v}$  régulier, et une fonction  $g$  régulière, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla g(x) \cdot \vec{v}(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \operatorname{div} \vec{v}(x) dx.$$

C'est cette formule qu'on utilise pour définir le gradient au sens des distributions.

- (b) Montrer que pour un champ de vecteur radial  $\vec{v}(x) = v(r)\vec{u}_r$  en dimension  $n$ , la divergence est radiale et vaut  $\operatorname{div} v(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} (r^{n-1}v(r))$ .
- (c) Dans la suite, on se contentera de faire les calculs pour  $x = 0$ . Pour tous  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ , on définit un champ de vecteur radial par

$$V_{\varepsilon,\varepsilon'}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r \left[ \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon'^n} \phi\left(\frac{u}{\varepsilon'}\right) \right] u^{n-1} du.$$

Montrer que  $\operatorname{div} V_{\varepsilon,\varepsilon'}(r) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\varepsilon'^n} \phi\left(\frac{u}{\varepsilon'}\right)$  et que  $\|\vec{V}_{\varepsilon,\varepsilon'}\|_1 \leq C \max(\varepsilon, \varepsilon')$ .

- (d) Montrer que pour  $\vec{v}$  régulière,

$$|\langle f, \operatorname{div} \vec{v} \rangle| \leq \|\nabla f\|_\infty \|\vec{v}\|_1.$$

- (e) En déduire que la suite  $(f_\varepsilon(0))_\varepsilon$  est de Cauchy, puis que l'on peut définir ainsi un représentant de la classe de  $f$  dont tous les points sont de Lebesgue.

2. Il reste à montrer que ce représentant est lipschitzien.

- (a) Pour une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $h \in \mathbb{R}^n$ , calculer  $\operatorname{div}(\phi h)$ .

- (b) Utiliser que  $g(z+h) - g(z) = \int_0^1 \nabla g(z+th) \cdot h dt$  pour montrer que

$$|f_\varepsilon(x+h) - f_\varepsilon(x)| \leq \|\nabla f\|_\infty |h|,$$

et en déduire le résultat annoncé.

3. La réciproque est plus simple. On montrera que si  $f$  est lipschitzienne de constante  $K$ , alors pour tout champ de vecteur régulier  $\vec{v}$ , on a

$$|\langle \nabla f, \vec{v} \rangle| = |\langle f, \operatorname{div} \vec{v} \rangle| \leq K \|\vec{v}\|_1$$

en utilisant que  $\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{v_i(y+h) - v_i(y)}{h}$ .

Remarquons pour finir que ce résultat est différent du fait (beaucoup plus dur à démontrer) que toute fonction lipschitzienne est dérivable presque partout.

**Exercice 4. Preuve du lemme de Grönwall.**

1. Écrire la preuve du lemme de Grönwall. Pour la partie avec un champ  $b$  quelconque, il faut mieux supposer dans un premier temps que l'inégalité est stricte, car on peut alors faire un raisonnement du type "tant que  $y$  est sous  $z$  c'est bon, mais si elle la dépasse, alors...". Pour le cas général, on peut introduire  $b + \varepsilon$  et utiliser la continuité des solutions d'une EDO par rapport à un paramètre.
2. Appliquer le lemme de Grönwall dans la dernière partie de la preuve de la proposition 2.

**Exercice 5. La distance de Hausdorff.**

Pour tout point  $x \in \mathbb{R}^d$ , et partie  $A \in \mathbb{R}^d$ , on définit

- $d(x, A)$  la distance de  $x$  à  $A$  par  $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$
- $A_\varepsilon$  l' $\varepsilon$ -voisinage de  $A$  par  $A_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^d \mid d(y, A) \leq \varepsilon\}$

1. Montrer que pour toute partie  $A$ ,  $d(\cdot, A)$  est 1-lipschitzienne, et que  $A_\varepsilon$  est un fermé.

2. On définit ensuite la distance de Hausdorff entre deux parties  $A$  et  $B$  par

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid B \subset A_\varepsilon \text{ et } A \subset B_\varepsilon\}$$

- (a) Montrer que  $d_H$  vérifie l'inégalité triangulaire.
- (b) Que peut-on dire si  $d_H(A, B) = 0$  ?
- (c) En déduire que  $d_H$  est une distance sur l'ensemble  $\mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  des parties compactes de  $\mathbb{R}^d$ . Est-ce une distance sur l'ensemble des parties fermées ?

**Exercice 6. Existence de "solutions" pour des EDO avec champs  $L^\infty$ .**

Soit  $b$  un champ de vecteurs borné sur  $\mathbb{R}^d$  ( $b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ). On définit la fonction  $F_b$  à valeur dans les ensembles par

$$F_b(x) = \overline{\text{Conv ess } b(x)}$$

où l'enveloppe convexe essentielle est définie par

$$\overline{\text{Conv ess } b(x)} := \bigcap_{r>0} \bigcap_{N, \lambda(N)=0} \overline{\text{Conv}\{b(y) \mid y \in B(x, r) \setminus N\}},$$

et  $\overline{\text{Conv}}$  désigne l'adhérence de l'enveloppe convexe d'un ensemble.

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^d, F_b(x)$  est compact.
2. On choisit une suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$  et une suite  $(y_n)$  de vecteurs tels que  $y_n \in F_b(x_n)$ . On suppose que la suite  $(y_n)$  converge vers  $y$ . Montrer que  $y \in F_b(x)$  et en déduire  $F_b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^d)$  muni de la distance de Hausdorff (voir l'exercice 5) est semi-continue supérieurement.
3. En déduire l'existence d'une solution à l'inclusion différentielle  $\dot{x} \in F_b(x)$ .
4. Montrer que si  $b$  est continue, alors pour tout  $x, F_b(x) = \{b(x)\}$ .
5. Autre définition possible : Montrer que

$$G_b(x) = \left\{ \text{valeurs d'adhérence de } \int_{B(x_n, r_n)} f(y) dy \mid x_n \rightarrow x, r_n \rightarrow 0 \right\}$$

est également une fonction à laquelle on peut appliquer le théorème de Filipov. Montrer que pour tout  $x, G_b(x) \subset F_b(x)$ .

6. Attention,  $G_b$  ne vérifie pas  $G_b(x) = \{b(x)\}$  pour presque tout  $x$ . Pour le voir, on peut considérer le champ  $b$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $b = \xi_C$ , la fonction indicatrice du Cantor  $C$  défini comme suit. On part du segment  $[0, 1]$  auquel on enlève en son milieu un intervalle de longueur  $\frac{1}{4}$ . Puis on procède par récurrence et en enlevant à chaque rang au milieu de chaque intervalle restant (de longueur  $l$ ), un intervalle de longueur  $\frac{l}{(n+1)^2}$  centré au milieu. À la limite on obtient un ensemble  $C$  de mesure non nulle (pourquoi ?), et  $G_b = \{0, 1\}$  sur  $C$  (à démontrer).

**Exercice 7. Mesures images.**

1. Calculer les mesures images pour les applications  $T$  suivantes, définies de  $[0, 1]$  dans lui-même :

$$x \mapsto \frac{1}{2}, \quad x \mapsto x^2, \quad x \mapsto 1 - x, \quad x \mapsto 2x \pmod{1}.$$

2. En reprenant les notations de l'exo 1, calculer les mesures images  $T_{\#}\lambda$ , pour  $i = 1, 2$ .

**Exercice 8. Divergences et flots.**

Sur  $\mathbb{R}^2$  on définit pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  les champs suivants ( $x^\perp$  désigne le vecteur  $x$  tourné de  $+\frac{\pi}{2}$ )

$$a_1(x) = |x|^{\alpha-1}x, \quad a_2(x) = |x|^{\alpha-1}x^\perp, \quad a_3(x) = -|x|^{\alpha-1}x^\perp, \quad a_4(t, x) = \begin{cases} a_1(x) & \text{si } t \in [0, 1] \\ a_3(x) & \text{si } t \in ]1, +\infty[ \end{cases}.$$

au besoin pour simplifier les calculs on pourra travailler uniquement avec  $\alpha = -1, 0, 1, \dots$

1. Calculer la divergence des champs  $a_i, i = 1, \dots, 4$  en fonction de  $\alpha$ . Dans quels cas la divergence est bornée inférieurement ? Dans quels cas est-elle localement bornée inférieurement ?
2. Pour quelle valeur de  $\alpha$  et  $p$  les champs  $a_i, i = 1, 2, 3$  sont-ils dans  $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^2)$  ? Et quand est-ce que  $a_4 \in L_{t,loc}^1(W_x^{1,p}(\mathbb{R}^2))$  ?

3. Pour quels champs peut-on appliquer le théorème d'existence et d'unicité d'un flot quasi-incompressible ? Écrire ces flots, calculer leur Jacobien et vérifier qu'il vérifie bien l'équation attendue.
4. Pour  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , montrer qu'il existe pour tous les  $\alpha$  un unique flot défini pour  $t \geq 0$  (*la théorie des inclusions différentielles et ses critères d'unicité peut-être utile dans certains cas*). Écrire les mesures images dans ces cas également.
5. Pour  $a_4$  et dans le cas où le théorème général ne s'applique pas, montrer qu'on peut construire de nombreux flots solutions (une infinité en fait). Calculer leur mesure image au cours du temps pour quelques exemples.

**Exercice 9.** Terminer rigoureusement la preuve du théorème 4.

## Références

- [1] Jean-Pierre Aubin and Arrigo Cellina. *Differential inclusions*, volume 264 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Set-valued maps and viability theory.
- [2] Gianluca Crippa. *The flow associated to weakly differentiable vector fields*, volume 12 of *Publications of the Scuola Normale Superiore*. Edizioni della Normale, Pisa, 2009.
- [3] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, volume 18 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. Translated from the Russian.