Université de Provence 2010–2011

M2 EDP-CS : EDO et équations de transport

Examen du 8 Mars 2011

Exercice 1 : **EDO et EC partant d'un Dirac**

Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation de transport et l'équation de conservation associées au champ $x \mapsto x+1$

$$\partial_t f + (x+1)\partial_x f = 0, \qquad \partial_t f + \partial_x[(x+1)f] = 0$$

On notera $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 en $\pm\infty$.
Une suite (m_n) de mesure sur $\mathbb{R}$ converge faiblement (au sens des mesures) vers $\bar{m}$ si pour toute fonction $h \in C_0(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, dm_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\bar{m}(x).$$

Dans cet exercice, toute limite et toute convergence seront entendues au sens ci-dessus. Une fonction f sera identifiée à la mesure $f(x)\,dx$.

1. On pose $\phi_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2+x^2)}$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\,dx$ et montrer que ϕ_ε converge vers δ_0 le Dirac en 0.
2. Exprimer g_ε, l'unique solution dans $L^\infty_t(L^1_x)$ de l'EC avec donnée initiale ϕ_ε et calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(t,\cdot)$.
   On montrera que $g_\varepsilon(t,x) = \frac{\varepsilon'}{\pi[\varepsilon'^2+(x-y(t))^2]}$, *avec* $\varepsilon' = \varepsilon e^t$ *et* $y(t) = e^t - 1$.
3. Exprimer f_ε, l'unique solution dans $L^\infty_t(L^1_x)$ de l'EdT avec donnée initiale ϕ_ε. Calculer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(t,\cdot)$.
4. En déduire les solutions de l'EC et de l'EdT (notées respectivement m_g et m_f) avec condition initiale δ_0.
5. Calculer $\lim_{t\to\infty} m_f$ et $\lim_{t\to\infty} m_g$.

Exercice 2 : **Non-unicité des solutions**

Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation de transport et l'équation de conservation associées au champ $x \mapsto 1+x^2$

$$\partial_t f + (1+x^2)\partial_x f = 0, \qquad \partial_t f + \partial_x[(1+x^2)f] = 0$$

1. Pour une condition initiale x_0, résoudre l'EDO associée. On précisera sont intervalle de définition (en temps).
2. En déduire le flot associé (préciser son ensemble de définition). Calculer son Jacobien et faire un dessin dans l'espace (t,x) représentant quelques solutions.
3. Écrire les formules usuelles des solutions de l'EC et de l'EdT et montrer qu'elles ne permettent pas de définir les solutions pour $t = \frac{\pi}{2} + \arctan x$. Pouvez-expliquer pourquoi à l'aide de votre dessin ?
4. Montrer que la fonction $\bar{g}$ définie par

$$\bar{g}(t,x) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < \frac{\pi}{2} + \arctan x \\ \frac{1}{1+x^2} \text{ sinon} \end{cases}$$

   est solution de l'équation de conservation au sens des distributions. Quelle est sa condition initiale ?
   (*Faire un dessin du domaine d'intégration, séparer les dérivées en x et en t, intégrer et utiliser le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.)*
5. Trouver une solution non nulle de l'EdT avec condition initiale nulle (une justification rapide ou avec dessin suffira).

Problème : Propriété de mélange des Flots [1]

Dans ce problème, on se place sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Z}^2$. On décrira un point x de $\mathbb{T}^2$ avec des coordonnées $x = (x_1, x_2) \in [0,1[^2$. On utilisera les définitions suivantes :

- λ désignera la mesure de Lebesgue sur le tore, et λ_1 la mesure de Lebesgue sur les segments.
- Une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ sera dite C^1 par simplexes s'il existe une partition $\bigcup_{i=1}^n D_i = \mathbb{T}^2$ (on autorise les recouvrements de frontière) telle que

  i) f est de classe C^1 sur chacun des $\overline{D_i}$

  ii) les D_i sont des simplexes, c'est-à-dire ont pour frontière une réunion de segments $S_j,\ j = 1, \ldots, m$.

  L'ensemble des fonctions C^1 par simplexes sera notée C^1_s.
- Pour une fonction $f \in C^1_s$, on définit sa semi-norme BV par

$$\|f\|_{BV} = \sum_{i=1}^n \int_{D_i} |\nabla f(x)|\, dx + \sum_{j=1}^m \int_{S_j} |f^+(y) - f^-(y)|\, d\lambda_1(y)$$

  où $f^+(y)$ et $f^-(y)$ sont les valeurs de part et d'autres de la frontière (l'ordre n'a pas d'importance).

  On admettra que cela défini bien une semi-norme sur C^1_s. Pour une fonction $b = (b_1, b_2)$ vectorielle, on la dira C^1 par simplexes si toutes ses composantes le sont, et on définira

$$\|b\|_{BV} = \|b_1\|_{BV} + \|b_2\|_{BV}$$

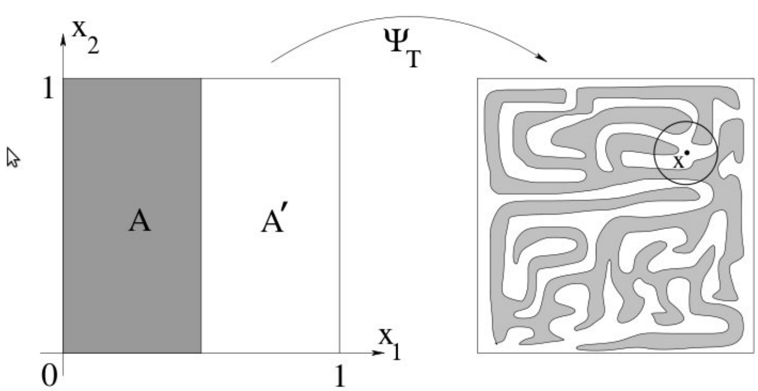
- Pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne ici la partie entière de x.
- On notera $A = \{x \in [0,1[^2 | 0 \leq x_1 < \frac{1}{2}\}$, $\qquad A' = \{x \in [0,1[^2 | \frac{1}{2} \leq x_1 < 1\}$ (voir figure ci-dessous).

Le but de ce problème est d'étudier les propriétés de mélange d'un flot.

Définition 1 *On dit qu'un flot Ψ_T mélange jusqu'à l'échelle ρ s'il existe une bijection mesurable* [2] *(d'inverse mesurable) de $\varphi : \Psi_T(A) \to \Psi_T(A')$ telle que*

$$\forall x \in \Psi_T(A), \quad |x - \varphi(x)| \leq \rho.$$

Voici un exemple de flot mélangeant



1. D'après une question intéressante d'Alberto Bressan. Voir http ://www.math.psu.edu/bressan/
2. L'existence d'une telle bijection est une hypothèse trop forte. Pour la rendre plus réaliste, on demandera qu'elle soit définie sur au moins la moitié de $\Psi_t(A)$ et non $\Psi_t(A)$ tout entier. Mais cela ne change rien aux techniques utilisées, et on utilisera ici cette définition.

Le but de ce problème est d'étudier les liens entre la norme BV d'un champ de vecteur, et ses propriétés de mélange. Au travers de la conjecture suivante

> **Conjecture :** Il existe une constante numérique C positive telle que pour tout champ de vecteur $b \in L^1([0,T], BV(\mathbb{T}^2))$ à divergence nulle dont le flot associé mélange au temps T jusqu'à une échelle ρ, on ait
> $$-C \int_0^T \|b(t,\cdot)\|_{BV}\, dt \leq \ln(4\rho)\,.$$

Dans la première partie, on montre que si une telle constante C existe, alors elle est nécessairement supérieure à $\frac{\ln 4}{3}$. Dans la seconde partie, on montrera que cette constante C existe quand on remplace $\|b(t,\cdot)\|_{BV}$ par $\|M(Db)(t,\cdot)\|_1$ (M désignant la fonction maximale). La conjecture avec la norme BV n'est pas résolue actuellement.

Première partie

1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ les champs de vecteurs $b_n : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$ par
$$b_0(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}, 0) \text{ si } \lfloor 2x_2 \rfloor \text{ est impair} \\ (0,0) \text{ sinon} \end{cases}$$
et pour $n \geq 1$
$$b_{2n-1}(x) = \begin{cases} (0, 2^{-n}) \text{ si } \left\lfloor \frac{1}{2} + 2^n x_1 \right\rfloor \text{ est impair} \\ (0,0) \text{ sinon} \end{cases}, \qquad b_{2n}(x) = \begin{cases} (2^{-(n+1)}, 0) \text{ si } \left\lfloor \frac{1}{2} + 2^n x_2 \right\rfloor \text{ est impair} \\ (0,0) \text{ sinon} \end{cases}$$
   (a) Dessiner sur 4 carrés $[0,1[^2$ les champs de vecteurs b_0, b_1, b_2 et b_3 *(on utilisera des flèches).*

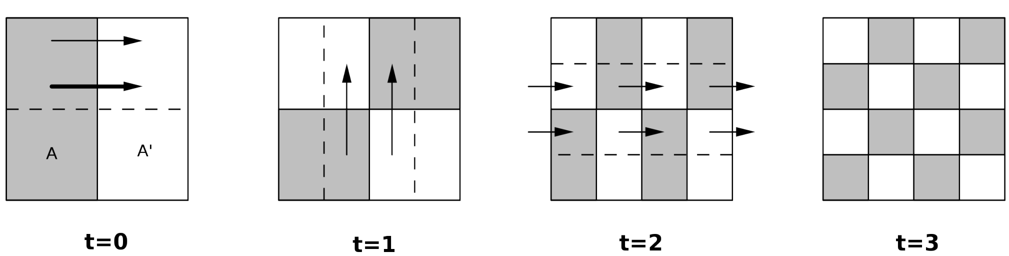
   (b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, les b_n sont bien définis, c'est-à-dire que si $k \in \mathbb{Z}^2$ alors $b_n(x+k) = b_n(k)$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $b_{n+2}(x) = \frac{1}{2} b_n(2x)$.

   (d) Montrer que tous ces champs sont à divergence nulle et calculer $\|b_n\|_{BV}$ pour tout n.

2. On définit le champ de vecteur b dépendant du temps : $\quad b(t,x) = b_{\lfloor t \rfloor}(x)$.
c'est-à-dire que si $t \in [0,1[$, $b(t,x) = b_0(x)$, si $t \in [1,2[$, $b(t,x) = b_1(x)$ ...
On notera $\Phi_t(x) = \Phi(t,0,x)$ le flot associé au champ b partant de $t=0$ et arrivant au temps t.

   (a) Justifier brièvement que la figure ci-dessous représente bien l'évolution des parties A et A' aux temps $t = 1, 2, 3$.



   (b) Dessiner la situation au temps $t=4$ et $t=5$.

   (c) Expliquer pourquoi le dessin au temps $t = 2n+1$ sera un damier avec des cases de taille $2^{-(n+1)}$.

   (d) En déduire que le flot Φ_{2n+1} mixe jsuqu'à l'échelle $2^{-(n+2)}$ *(Dessin possible pour justifier la construction de φ).*

3. (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2n+1} \|b(t,\cdot)\|_{BV}\, dt$

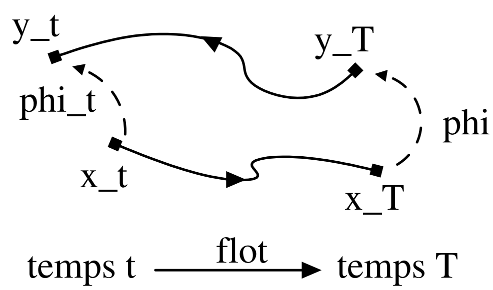
   (b) En déduire que si la conjecture est vraie, alors $C \geq \frac{\ln 4}{3}$.

Seconde partie

On choisi maintenant un champ b à divergence nulle quelconque, vérifiant en plus $b \in L^1([0,T], BV_x)$ et mélangeant au temps T jusqu'à l'échelle ρ. On note le flot associée $\Phi_t^s(x) = \Phi(t,s,x)$ *(haut : temps de départ, bas : temps d'arrivée).*

4. On définit pour $t \in [0,T]$ et $\alpha > 0$ une application φ_t et une quantité $Q_\alpha(t)$ par

$$\varphi_t = \Phi_t^T \circ \varphi \circ \Phi_T^t = \Phi(t,T,\cdot) \circ \varphi \circ \Phi(T,t,\cdot), \qquad Q_\alpha(t) = \int_{\Phi_t(A)} \ln\left(1 + \frac{|x - \varphi_t(x)|}{\alpha}\right) dx.$$



   (a) Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de φ_t.

   (b) Majorer simplement $Q_\alpha(T)$ en fonction de ρ et α *(Que vaut φ_T ?).*

   (c) Justifier que $Q_\alpha(t) = \displaystyle\int_{\Phi_T(A)} \ln\left(1 + \frac{|\Phi_t^T(\varphi(x)) - \Phi_t^T(x)|}{\alpha}\right) dx.$

   (d) Montrer que $\dfrac{d}{dt}\Phi_t^T(x) = -b(\Phi_t^T(x))$.

   (e) En déduire que $Q'(t) \geq -3\|M(Db_t)\|_1$, où M désigne la fonction maximale *(Au besoin remplacer 3 par une autre constante).*

   (f) Utiliser ceci pour obtenir une majoration de $Q(0)$.

5. φ_0 est donc une fonction mesurable bijective de $A \to A'$.

   (a) Expliquer pourquoi φ_0 préserve la mesure.

   (b) En considérant la bande située au milieu de A, montrer que

$$Q_\alpha(0) \geq \frac{1}{4}\ln\left(1 + \frac{1}{8\alpha}\right) \geq \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{8\alpha}\right)$$

   (c) En fait, on peut aussi montrer (moins simplement) que $\quad Q_\alpha(0) \geq \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{1}{4\alpha}\right) \geq \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{4\alpha}\right)$.
   Utiliser cette inégalité et les questions précédentes pour montrer que

$$\ln(4\rho) \geq -6\int_0^T \|M(Db_t)\|_1\, dt\,.$$