

# **Le critère de Penrose dans le cas périodique.**

MENDELE M'EKOME Linge Patrick

Mardi 27 Septembre 2011

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>L'article de Penrose</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Critère de stabilité de Penrose . . . . .                              | 7         |
| <b>3</b> | <b>Outils mathématiques</b>  | <b>8</b>  |
| 3.1      | Analyse complexe : théorème des résidus . . . . .                      | 9         |
| 3.2      | Valeur principale associée . . . . .                                   | 9         |
| <b>4</b> | <b>Approximation numérique</b>   | <b>10</b> |
| 4.1      | Méthode du point milieu . . . . .                                      | 10        |
| <b>5</b> | <b>Le critère de Penrose dans une boîte</b>                            | <b>12</b> |
| 5.1      | Différence entre transformée de Fourier et séries de Fourier . . . . . | 13        |
| 5.2      | Adaptation de l'argument de Penrose . . . . .                          | 13        |
| 5.3      | Exemples . . . . .   | 14        |
| 5.4      | Quand la taille $L$ tend vers l'infini . . . . .                       | 14        |
| <b>A</b> | <b>Code numérique</b>  | <b>15</b> |
| <b>B</b> | <b>Quelques exemples</b>   | <b>17</b> |

# 1 Introduction

L'équation de Vlasov est une équation de transport non-linéaire très importante en physique car elle modélise l'évolution d'une distribution  $f(t, x, v)$  en temps, position et vitesse de particules dans un plasma (fluide formé d'un ensemble de molécules gazeuses, d'ions et d'électrons) ou d'étoiles dans une galaxie. Pour la distribution des électrons dans un plasma sur un domaine périodique de dimension 1, le tore  $\mathbb{T} = [0, 1[$  pour les positions et les vitesses dans  $\mathbb{R}$ , et, elle s'écrit :

$$\partial_t f + v \partial_x f - \nabla V(t, x) \partial_v f = 0 \quad (1)$$

Où le potentiel électrostatique  $V$  dépend de la distribution via la densité  $\rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv$  et la loi de Poisson

$$-\partial_{xx}^2 V = \rho - 1 \quad (2)$$

Le 1 est dû à la présence des ions que l'on suppose répartis de manière homogène.

Cette équation possède des solutions stationnaires : Toute fonction  $g(v)$  qui ne dépend que de  $v$  est en effet une solution de cette équation. Mais, savoir si une telle solution  $g$  est un équilibre stable ou instable du problème est une question délicate. Penrose a donné en 1960 un critère d'instabilité qui porte maintenant son nom ( ici adapté au cas non périodique ) :

*Une solution  $g(v)$  est linéairement instable si elle possède un minimum en un point  $v_0$  tel que*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g(v) - g(v_0)}{(v - v_0)^2} dv > 0$$

Une telle solution présente au moins deux bosses (si elle tends bien vers zero à l'infini). Cette instabilité est bien observée numériquement : c'est l'instabilité double faisceaux. Par opposition, les profils à une seule bosse n'ont pas de profils instable, d'après ce critère. Le sens de la mathématique des hypothèses faites sont soigneusement examinés.

## 2 L'article de Penrose

Dans le cas non périodique, l'équation de Vlasov-Poisson devient :

$$(1) \begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f - \nabla V(t, x) \partial_v f = 0 \\ -\partial_{xx}^2 V = \rho \end{cases}$$

On cherche les solutions de la forme

$$f(t, x, v) = g(v) + h(t, x, v) \quad (3)$$

où  $g(v)$  est la solution d'équilibre (solution stationnaire, indépendante du temps et qui vérifie l'équation de Vlasov). Après substitution de (3) dans le système précédent, On a :

$$\begin{cases} \partial_t (g + h) + v \partial_x (g + h) + E_{(g+h)} \partial_v (g + h) = 0 \\ \partial_x E_{(g+h)} = \rho_g + \rho_h \end{cases}$$

Avec  $E = -\partial_x V$

Or  $\rho_g = \int g dv = c^{te}$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $c^{te} = 0$

Par suite,  $\partial_x E_{(g+h)} = \rho_h = \partial_x E_h$

Il vient donc après simplification

$$\begin{cases} \partial_t h + v \partial_x h + E_h \partial_v g + \underbrace{E_h \partial_v h}_{\text{terme quadratique en } h} = 0 \\ \partial_x E_h = \rho_h \end{cases}$$

On obtient ensuite deux nouvelles équations après linéarisation autour de  $g$  :

$$\begin{cases} \partial_t h + v \partial_x h + E_h \partial_v g = 0 \\ \partial_x E_h = \rho_h \end{cases}$$

Supposons que  $h(t, x, v)$  ait un profil d'onde du type  $h(v) e^{i(kx - \omega t)}$  ou  $k$  et  $\omega$  sont des constantes à déterminer. En dérivant la première équation par rapport à  $x$  et après substitution de la seconde, on a :

$$\partial_x (\partial_t h) + v \partial_{xx}^2 h + \rho_h \partial_v g = 0$$

Or

$$\begin{aligned}\partial_t h &= -i\omega h \implies \partial_x(\partial_t h) = k\omega h \\ \partial_x h &= ikh \implies \partial_{xx}^2 h = -k^2 h\end{aligned}$$

Il vient donc

$$k\omega h - vk^2 h + \rho_h \partial_v g = 0 \implies k^2(v - \omega/k)h = \rho_h \partial_v g$$

- Si  $v - \omega/k \neq 0$ , alors

$$k^2 h = \rho_h \frac{\partial_v g}{v - \omega/k}$$

Puis, en intégrant par rapport à la variable  $v$ , on montre que pour une solution non trivial,  $k$  et  $\omega$  doivent être relié par la formule de dispersion suivante :

$$k^2 = \int \frac{\partial_v g}{v - \omega/k} dv \quad (4)$$

$\omega$  peut-être complexe mais  $k$  doit être réel sinon  $e^{ikx}$  ne serait pas assez petit pour justifier la linéarisation partout dans un plasma non borné. Cette formule de dispersion peut-être utilisée pour discuter de la stabilité d'un plasma (mélange globalement neutre des particules chargées, ions et électrons) uniforme non-maxwellien avec des fonctions de distribution de vitesse  $g(v)$ .

Si l'équation (4) a une solution pour laquelle  $Im\omega > 0$  alors  $|e^{-i\omega t}| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ , et une petite perturbation de la fonction de distribution peut croître exponentiellement jusqu'à ce que l'approximation linéaire ne soit plus valable. Physiquement, l'état uniforme décrit par  $g(v)$  est instable à cause d'une des oscillations du plasma. D'autre part, si (4) n'a pas de solution pour laquelle  $Im\omega > 0$ , les oscillations de plasma qui croissent exponentiellement ne sont pas possibles. Cela n'implique pas que l'état soit stable, car il peut exister des perturbations augmentant linéairement avec le temps.

Le but est d'obtenir un critère simple de stabilité pour un plasma uniforme non-maxwellien. La discussion ci-dessus montre que deux questions séparées sont impliquées : premièrement, obtenir une méthode pour découvrir si en effet (4) a des solutions avec  $Im\omega > 0$ , et ensuite, vérifier que le plasma est stable quand il n'y a aucune telle solution.

Posons  $\zeta = \omega/k$  et définissons la fonction suivante :

$$Z(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \zeta} dv$$

pour  $Im\zeta > 0$ .

Ici  $\zeta$  est une variable complexe qui peut être interprété comme vitesse de phase. Si en croissant exponentiellement, les ondes de plasma peuvent se propager alors (4) a des solutions avec  $Im\omega > 0$  et cela implique comme  $k^2 > 0$  que la fonction  $Z(\zeta)$  prend une valeur positive réelle quelque part dans la moitié supérieur du plan complexe. Inversement, si  $Z(\zeta)$  prend une valeur réelle positive à un point  $\zeta_0$  dans la moitié supérieure du plan, alors (4) peut être satisfaite en prenant  $k = \sqrt{Z(\zeta_0)}$  et  $\omega = \zeta_0 k$ , pour que  $Im\omega = kIm\zeta_0$ , et les modes exponentiellement croissant existent vraiment. Ainsi, *les modes exponentiellement croissant existent si et seulement si la fonction  $Z(\zeta)$  prend une valeur réelle positive dans la moitié supérieur du plan complexe.*

Les analyses effectuées tiendrons seulement pour  $g(v)$  assez régulière avec un comportement convenable à l'infini. Pour poursuivre la discussion nous devons introduire les définitions de la Valeur principale et d'une fonction Holomorphe.

**Définition 1.** Soit  $c$  une singularité d'une fonction d'une variable réelle  $f$  et supposons que pour  $a < c < b$ , la limite suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx = L$$

existe et est finie. Alors, On dit que l'intégrale impropre de  $f(x)$  sur l'intervalle existe et sa valeur est définie par  $L$ . Si la limite ci-dessus n'existe pas, il est toutefois possible qu'elle existe lorsque  $\varepsilon$  et  $\eta$ , tendent vers 0 en restant égaux, c'est -à-dire si la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right) = L$$

existe et est finie. Dans ce cas là, on appelle la limite  $L$  la valeur principale de Cauchy de l'intégrale impropre ce que l'on écrit :

$$P.V \int_a^b f(x)dx = L$$

**Définition 2.** Soit  $U$  un sous ensemble ouvert (non vide) de l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes et une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

• On dit que  $f$  est dérivable (au sens complexe) ou holomorphe en un point  $z_0$  de  $U$  si la limite suivante, appelée dérivée de  $f$  en  $z_0$  existe :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

• On dit que  $f$  est holomorphe sur l'ouvert  $U$  si elle est holomorphe en tout point  $z_0$  de  $U$ . En particulier, on appelle fonction entière une fonction holomorphe dans tout le plan complexe.

**Proposition 1.** Supposons que  $\partial_v g, \partial_{vv} g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ . Alors la fonction  $\zeta \mapsto Z(\zeta)$  est bien définie, holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et de plus,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} Z(\xi + i\eta) = P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv + i\pi \partial_v g(\xi) \quad \text{et} \quad \lim_{\eta \rightarrow 0^-} Z(\xi + i\eta) = P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv - i\pi \partial_v g(\xi) \quad (5)$$

*Démonstration.*  $\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , les fonctions  $v \mapsto 1/(v - \zeta)$  et  $v \mapsto \partial_v g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Donc

$$h(v, \zeta) = \frac{\partial_v g}{v - \zeta}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$  comme produit de deux fonctions continues. Par Cauchy-Schwarz

$$|Z(\zeta)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial_v g}{v - \zeta} \right| dv \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_v g|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|v - \zeta|^2} dv \right)^{1/2} = \|\partial_v g\|_{L^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv \right)^{1/2}$$

ou l'on a posé  $\zeta = \xi + i\eta$ . En effectuant le changement de variable  $r = (v - \xi)/\eta$  nous obtenons

$$|Z(\zeta)| \leq \|\partial_v g\|_{L^2} \sqrt{\frac{\pi}{|\eta|}}$$

ce calcul montre que  $Z$  est bien définie.  $\forall v \in \mathbb{R}, \forall \zeta_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , la fonction  $\zeta \mapsto h(v, \zeta)$  est dérivable en  $\zeta_0$  et

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta}(v, \zeta_0) = \frac{\partial_v g}{(v - \zeta_0)^2}$$

et on a :

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} = \frac{\partial_v g}{(v - \zeta)^2} \implies \left| \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right| = \frac{|\partial_v g|}{(v - \xi)^2 + \eta^2}$$

• Remarquons que la borne est mauvaise si  $\eta = 0$ , car la fonction  $v \mapsto 1/(v - \xi)$  a une singularité au voisinage de  $\xi$ . On suppose que  $|\eta| \geq \alpha > 0$  et alors

$$\left| \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right| \leq \frac{|\partial_v g|}{(v - \xi)^2 + \alpha^2}$$

On suppose ainsi  $|\xi| \leq M$  alors

• Si  $|v| \geq 2M \geq 2|\xi| \implies |v - \xi| \geq |v| - |\xi| \geq |v|/2$  donc

$$\left| \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right| = \begin{cases} |\partial_v g|/\alpha^2 & \text{pour } |v| \leq 2M \\ 4|\partial_v g|/v^2 & \text{pour } |v| \geq 2M \end{cases}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right| dv = 4 \int_{-\infty}^{-2M} \frac{|\partial_v g|}{v^2} dv + \frac{1}{\alpha^2} \int_{-2M}^{2M} |\partial_v g| dv + 4 \int_{2M}^{+\infty} \frac{|\partial_v g|}{v^2} dv$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\int_{-\infty}^{-2M} \frac{|\partial_v g|}{v^2} dv \leq \left( \int_{-\infty}^{-2M} |\partial_v g|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{-2M} \frac{1}{v^4} dv \right)^{1/2} \leq \|\partial_v g\|_{L^2} \frac{1}{3(2M)^3} < \infty$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \int_{-2M}^{2M} |\partial_v g| dv \leq \frac{2\sqrt{M}}{\alpha^2} \left( \int_{-2M}^{2M} |\partial_v g|^2 dv \right)^{1/2} \leq \frac{2\sqrt{M}}{\alpha^2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_v g|^2 dv \right)^{1/2} = \frac{2\sqrt{M}}{\alpha^2} \|\partial_v g\|_{L^2} < \infty$$

la dernière intégrale s'obtient de la même manière que la première. On conclut par convergence dominée que  $Z$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  et que

$$Z'(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{(v - \zeta)^2} dv = \frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

et

$$Z(\xi + i\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - (\xi + i\eta)} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(v - \xi)\partial_v g}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \partial_v g}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv$$

remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta \partial_v g(v)}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g(\xi + \eta r)}{r^2 + 1} dr$$

par changement de variable  $r = (v - \xi)/\eta$ .

Montrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g(\xi + \eta r) - \partial_v g(\xi)}{r^2 + 1} dr \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

Pour  $0 < \eta < 1$ ,

$$|\partial_v g(\xi + \eta r) - \partial_v g(\xi)| = \left| \int_{\xi}^{\xi + \eta r} \partial_{vv}^2 g(x) dx \right| \leq_{c.s} \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} \sqrt{\eta r}$$

donc

$$\left| \frac{\partial_v g(\xi + \eta r) - \partial_v g(\xi)}{r^2 + 1} \right| \leq \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} \frac{\sqrt{\eta r}}{r^2 + 1} \leq \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} \frac{\sqrt{\eta}}{(r^2 + 1)^{3/4}}$$

Or la fonction  $r \mapsto 1/(r^2 + 1)^{3/4}$  est intégrable au voisinage de 0 et à  $\infty$  donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial_v g(\xi + \eta r) - \partial_v g(\xi)}{r^2 + 1} \right| dr \leq \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r^2 + 1)^{3/4}} dr \sqrt{\eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0$$

On obtient que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g(\xi + \eta r)}{r^2 + 1} dr \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \partial_v g(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^2 + 1} dr = \pi \partial_v g(\xi)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\xi - \varepsilon} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv + \int_{\xi + \varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv \right) \\ \operatorname{Re} Z(\xi + i\eta) &= \int_{-\infty}^{\xi - 1} \frac{(v - \xi)\partial_v g}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv + \int_{\xi - 1}^{\xi + 1} \frac{(v - \xi)[\partial_v g(v) - \partial_v g(\xi)]}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv + \int_{\xi + 1}^{+\infty} \frac{(v - \xi)\partial_v g}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv \\ &\quad \left| \frac{(v - \xi)\partial_v g}{(v - \xi)^2 + \eta^2} \right| \leq \frac{|\partial_v g|}{|v - \xi|} \end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\xi - 1} \frac{|\partial_v g|}{|v - \xi|} dv &\leq \left( \int_{-\infty}^{\xi - 1} |\partial_v g|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\xi - 1} \frac{1}{|v - \xi|^2} dv \right)^{1/2} \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_v g|^2 dv \right)^{1/2} = \|\partial_v g\|_{L^2} < \infty \\ \left| \frac{(v - \xi)[\partial_v g(v) - \partial_v g(\xi)]}{(v - \xi)^2 + \eta^2} \right| &\leq \left| \frac{\partial_v g(v) - \partial_v g(\xi)}{v - \xi} \right| \\ \int_{\xi - 1}^{\xi + 1} \left| \frac{\partial_v g(v) - \partial_v g(\xi)}{v - \xi} \right| dv &\leq \int_{\xi - 1}^{\xi + 1} \int_0^1 |\partial_{vv}^2 g(\xi + t(v - \xi))| dt dv = \int_{-1}^1 \int_0^1 |\partial_{vv}^2 g(\xi + tv)| dt dv = A \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable  $v' = tv$ , on a :

$$A = \int_0^1 \left( \int_{-t}^t |\partial_{vv}^2 g(\xi + v')| \frac{dv'}{t} \right) dt$$

Par Cauchy-Schwarz

$$\int_{-t}^t |\partial_{vv}^2 g(\xi + v')| dv' \leq \left( \int_{-t}^t dv' \right)^{1/2} \left( \int_{-t}^t |\partial_{vv}^2 g(\xi + v')|^2 dv' \right)^{1/2} \leq \sqrt{2t} \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2}$$

Donc

$$A \leq \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} \int_0^1 \frac{\sqrt{2t}}{t} dt = \sqrt{2} \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{2} \|\partial_{vv}^2 g\|_{L^2} < \infty$$

la dernière intégrale s'obtient de la même manière que la première. On conclut par convergence dominée que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \operatorname{Re} Z(\xi + i\eta) = \int_{-\infty}^{\xi - 1} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv + \int_{\xi - 1}^{\xi + 1} \frac{\partial_v g(v) - \partial_v g(\xi)}{v - \xi} dv + \int_{\xi + 1}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv$$

□

**Proposition 2.** Soit  $\varepsilon > 0$ . On pose  $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} / |Imz| \geq \varepsilon\}$  alors  $|\zeta|^2 Z(\zeta)$  est bornée.

*Démonstration.*

$$\text{Comme } -\frac{1}{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_v g(v) dv = 0, \quad \text{alors } Z(\zeta) = Z(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_v g(v) dv$$

Or

$$Z(\zeta) + \frac{1}{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_v g(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_v g(v) \left[ \frac{1}{v-\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v \partial_v g(v)}{(v-\zeta)\zeta} dv$$

On suppose que  $Re(\zeta) > 0$ . On intègre sur  $[\frac{1}{2}Re(\zeta), \frac{3}{2}Re(\zeta)] = A$ , alors

$$\left| \int_A \frac{v \partial_v g(v)}{(v-\zeta)\zeta} dv \right| \leq \int_A \frac{|v| |\partial_v g(v)|}{|v-\zeta| |\zeta|} dv \leq \frac{1}{|Im(\zeta)| |\zeta|} \int_A |v| |\partial_v g(v)| dv$$

- Si  $|Im\zeta| \geq |Re\zeta|$  alors  $|Im\zeta| \geq |\zeta|/\sqrt{2}$  donc

$$\left| \int_A Z(\zeta) dv \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\zeta|^2} \int_A |v| |\partial_v g(v)| dv$$

$$\text{De même, } \left| \int_A \frac{v \partial_v g(v)}{(v-\zeta)\zeta} dv \right| \leq \frac{2}{|Re(\zeta)| |Im(\zeta)| |\zeta|} \int_A |v|^2 |\partial_v g(v)| dv$$

- Si  $|Re\zeta| \geq |Im\zeta|$  alors  $|Re\zeta| \geq |\zeta|/\sqrt{2}$ . On suppose en plus que  $\forall \varepsilon > 0, |Im\zeta| \geq \varepsilon$  alors

$$\left| \int_A Z(\zeta) dv \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \frac{1}{|\zeta|^2} \int_A |v|^2 |\partial_v g(v)| dv$$

On intègre sur  $] -\infty, \frac{1}{2}Re(\zeta)] \cup [\frac{3}{2}Re(\zeta), +\infty[ = B$ , alors on a :

$$|v - \zeta| = |v - Re(\zeta) - iIm(\zeta)| = \sqrt{|v - Re(\zeta)|^2 + |Im(\zeta)|^2} \geq \sqrt{\frac{1}{4}|Re(\zeta)|^2 + |Im(\zeta)|^2} \geq \frac{1}{2}|\zeta|$$

Donc

$$\left| \int_B Z(\zeta) dv \right| = \left| \int_B \frac{v \partial_v g(v)}{(v-\zeta)\zeta} dv \right| \leq \int_B \frac{|v| |\partial_v g(v)|}{|v-\zeta| |\zeta|} dv \leq \frac{2}{|\zeta|^2} \int_B |v| |\partial_v g(v)| dv$$

Nous obtenons les mêmes résultats lorsque  $Re(\zeta) < 0$

□

## 2.1 Critère de stabilité de Penrose

Il a été montré précédemment que les modes exponentiellement croissant existent si, et seulement si, la fonction

$$Z(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v-\zeta} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v)}{(v-\zeta)^2} dv \quad (6)$$

prend une valeur réelle positive dans la moitié supérieur du plan  $Im\zeta > 0$ .

D'après la Proposition 1,  $Z$  est une fonction analytique de  $\zeta$ , sur  $Im\zeta > 0$ . Son comportement sur le côté supérieur de l'axe réel est donnée par

$$Z(\xi + i0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_v g \frac{v - \xi + i\eta}{(v - \xi)^2 + \eta^2} dv = P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv + i\pi \partial_v g(\xi) \quad (7)$$

Où  $P.V$  désigne la valeur principale de cauchy. Pour exposer les propriétés pertinentes de la fonction  $Z(\xi + i0)$  nous utiliserons certains diagrammes dans le plan  $z$ . La fonction  $Z$  alloue à chaque point du plan  $\zeta$ , une image unique dans le plan  $z$ . Supposons maintenant que le point  $\zeta$  avance le côté supérieur de l'axe des réels de  $-\infty$  à  $+\infty$ .  $Z(\xi + i0)$  est continue, l'image  $Z(\zeta)$  tracera une courbe dirigée (voir figure 1) que nous appellerons l'image de l'axe réel où de  $Z(\mathbb{R})$ . Cette courbe débute et termine à l'origine  $z = 0$ ,  $Z(\infty) = 0$ . Maintenant si  $Z_0$  est un point étant sur  $Z(\mathbb{R})$ , alors par la proposition 3 de la section 3 le point  $Z(\xi + i0)$  avançant sur  $Z(\mathbb{R})$  tourne autour de  $Z_0$  en sens inverse des aiguilles d'une montre, le même nombre de fois que  $Z(\zeta)$  prend la valeur  $Z_0$  dans la moitié supérieur du plan.

Dorénavant, l'image de n'importe quelle point dans la moitié supérieur du plan doit être à l'intérieur ou sur  $Z(\mathbb{R})$ ; donc l'image du demi-plan supérieur est à l'intérieur de  $Z(\mathbb{R})$ . Par conséquent,  $Z(\zeta)$  prend des valeurs positive quelque part dans ce demi-plan si et seulement si la courbe  $Z(\mathbb{R})$  entoure la partie de l'axe  $z$  réel positif.

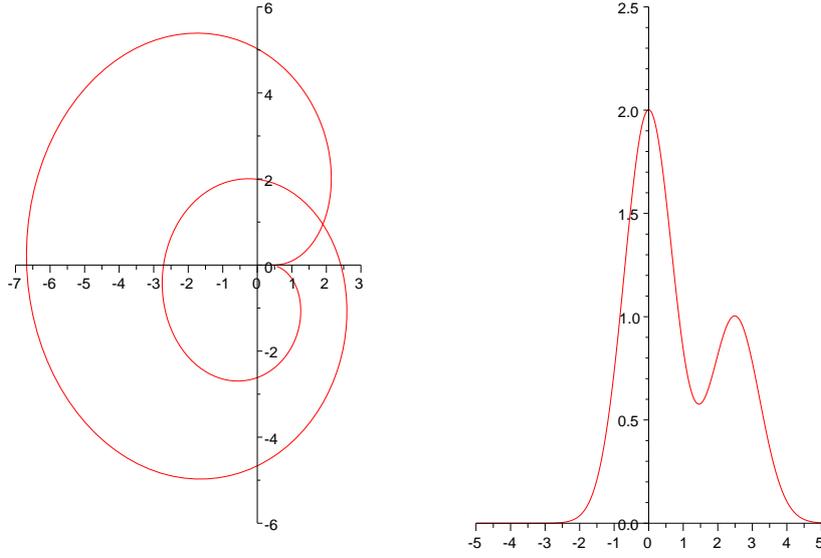


FIGURE 1 – Profil à droite et son diagramme de Penrose à gauche représente la courbe possible de  $Z([-5, 5])$  pour la distribution  $g(v) = 2e^{-v^2} + e^{-(v-v_0)^2}$ , avec  $v_0 = 2.5$ . L'image de la moitié supérieure du plan est à l'intérieur de la courbe obtenue pour  $M = 5$  et  $dx = 0.03$ . Elle incluent vraiment des valeurs réelles positives car  $Z([-5, 5])$  entoure la partie de l'axe  $z$  réel positif.

Cela peut à son tour arriver si et seulement si la courbe  $Z(\mathbb{R})$  passe l'axe  $z$  réel positif; de plus le point  $Z(\xi + i0)$  avançant de  $Z(\mathbb{R})$  entoure les points à l'intérieur dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sens qu'il doit se déplacer de bas en haut sur l'axe  $z$  réel positif. Par conséquent,  $Z(\zeta)$  prend des valeurs positives dans le demi-plan supérieur si et seulement si il y a un point où  $ReZ(\xi + i0)$  est positive et  $ImZ(\xi + i0)$  change de signe de - à +. Maintenant d'après (7), un tel changement de signe de  $ImZ(\xi + i0) = \pi \partial_v g(\xi)$  correspond à un minimum de  $g(v)$ . Aussi,  $ReZ(\xi + i0)$  peut, d'après (7) être exprimé de la forme

$$\begin{aligned}
Re Z(\xi + i0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\xi - \varepsilon} + \int_{\xi + \varepsilon}^{+\infty} \right\} \frac{d[g(v) - g(\xi)]}{v - \xi} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\xi - \varepsilon} + \int_{\xi + \varepsilon}^{+\infty} \right\} (u - \xi)^{-2} [g(v) - g(\xi)] dv + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2g(\xi) - g(\xi - \varepsilon) - g(\xi + \varepsilon)] / \varepsilon \\
&= P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v) - g(\xi)}{(v - \xi)^2} dv \quad (8)
\end{aligned}$$

Si  $g(v)$  a un minimum à  $v = \xi$ , la valeur principale dans (8) est unitile. En conséquence, nous pouvons déduire le critère de stabilité suivant : *Les modes exponentiellement croissant existent si, et seulement si, il y a un minimum de  $g(v)$  à une valeur  $v = \xi$  tel que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v) - g(\xi)}{(v - \xi)^2} dv > 0$$

Noté qu'un minimum de  $g(v)$  étant nécessaire pour l'instabilité, mais on n'a pas donné l'autre partie du critère. Il y a une ambiguïté si  $g(v)$  a un minimum plat occupant une gamme finie  $\xi_1 < \xi < \xi_2$  durant laquelle  $ImZ(\xi + i0) = 0$  et  $ReZ(\xi + i0)$  change de signe. Dans ce cas là, une partie de la courbe  $Z(\mathbb{R})$  est le long de l'axe  $z$  réel. Une étude de la figure montre que cette partie de  $Z(\mathbb{R})$  entoure sur son coté gauche une partie de l'axe réel positif si, et seulement si,  $ReZ(\xi + i0)$  est positive partout dans l'intervalle  $\xi_1 < \xi < \xi_2$ . Ainsi le critère donné au dessus est valable si la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v) - g(\xi)}{(v - \xi)^2} dv > 0$$

est interprété pour signifier que cette intégrale est positive partout dans l'intervalle  $\xi_1 < \xi < \xi_2$ . Quand le critère précédent indique vraiment qu'il n'y a aucune solution de  $k^2 = Z(\zeta)$  dans la moitié supérieur du plan une

méthode pour découvrir des solutions sur la frontière de la partie supérieur du plan, le côté supérieur de l'axe  $\zeta$  réel peut être utile. Si de telles solutions existent,  $Z(\mathbb{R})$  touche l'axe réel  $z$  positif sans le traverser et donc un critère convenable est qu'en l'absence des modes exponentiellement croissant, les solutions de  $k^2 = Z(\zeta)$  avec  $\zeta$  sur le côté supérieur de l'axe des réel se produisent si et seulement si il y a une valeur de  $\xi$  tel que  $\partial_v g(\xi) = 0$ ,  $\partial_{vv} g(\xi) = 0$ , et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v) - g(\xi)}{(v - \xi)^2} dv > 0$$

### 3 Outils mathématiques

**Définition 3.** Un pôle de la fonction  $f$  est un point  $a$  pour lequel  $f(z)$  tend vers l'infini lorsque  $z$  tend vers  $a$ . Formellement, soient  $U$  un ouvert du plan complexe  $\mathbb{C}$ , à un élément de  $U$  et  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe. S'il existe une fonction  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  et un entier naturel non nul  $n$  tels que :

$$g(a) \neq 0 \text{ et } f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n} \text{ pour tout } z \text{ dans } U \setminus \{a\}$$

alors  $a$  est un pôle de  $f$ . L'entier  $n$  est appelé l'ordre du pôle. Un pôle d'ordre 1 est un pôle simple.

**Définition 4.** Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.

#### 3.1 Analyse complexe : théorème des résidus

**Théorème 1.** Soit  $U$  un ensemble ouvert et simplement connexe du plan convexe  $\mathbb{C}$ ,  $z_1, \dots, z_n$  un ensemble de points distincts et isolés de  $U$  et  $f$  une fonction définie et holomorphe sur  $U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . Si  $\gamma$  est une courbe rectifiable dans  $U$  qui ne rencontre aucun des points singuliers  $z_k$  et dont le point de départ correspond au point d'arrivé (c'est-à-dire un lacet rectifiable), alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \text{Ind}_{\gamma}(z_k)$$

Ici,  $\text{Res}(f, z_k)$  désigne le résidu de  $f$  en  $z_k$ , et  $\text{Ind}_{\gamma}(z_k)$  l'indice du lacet  $\gamma$  par rapport à  $z_k$ . L'indice de la sommation  $\sum$  porte sur tous les points singuliers  $z_k$ , y compris le point à l'infini. Intuitivement, l'indice du lacet est le nombre de tours autour de  $z_k$  effectuées par un point parcourant tout le lacet. Ce nombre de tours est un entier ; s'il est positif  $\gamma$  est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens direct) autour de  $z_k$ , nul si  $\gamma$  ne se déplace pas du tout autour de  $z_k$  et négatif si  $\gamma$  est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre autour de  $z_k$ . L'indice est défini par

$$\text{Ind}_{\gamma}(z_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k}$$

**Proposition 3.** Soit  $c_k$ , le nombre de solutions de  $Z(\zeta) = k^2$  avec  $\text{Im}\zeta > 0$ . Alors

$$c_k = \text{Ind}_{Z(\mathbb{R}+i0)}(k^2)$$

*Démonstration.* Ici, nous donnons simplement les idées de la preuve. soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{Ind}_{Z(\mathbb{R}+i\varepsilon)}(k^2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{Z(\mathbb{R}+i\varepsilon)} \frac{1}{z - k^2} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \frac{Z'(\xi + i\varepsilon)}{Z(\xi + i\varepsilon) - k^2} d\xi$$

$$\text{la fonction } \xi \mapsto \frac{Z'(\xi + i\varepsilon)}{Z(\xi + i\varepsilon) - k^2}$$

est méromorphe (holomorphe + pôle), Ses pôles sont les solutions de  $Z(\zeta) = k^2$ , le résidu en un pôle est égal à l'ordre d'annulation. Puis par passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient le resultat.  $\square$

### 3.2 Valeur principale associée

**Proposition 4.** On définit l'espace  $C_0^n(\mathbb{R}) = \{f \in C^n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall m \leq n, \lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(m)}(x) = 0\}$ . Si  $f \in C_0^n(\mathbb{R})$ , alors  $\forall m \leq n, f^{(m)}$  est uniformément bornée.

*Démonstration.*  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f^{(m)}(x) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0 \text{ tel que } |x| > A_\varepsilon \implies |f^{(m)}(x)| < \varepsilon$

On fixe  $\varepsilon = 1$ . Alors,  $\exists A_1 > 0 \text{ tel que } |x| > A_1 \implies |f^{(m)}(x)| < 1$

Pour  $x \in [-A_1, A_1]$ ,  $f^{(m)}$  est continue sur un compact donc  $\exists M > 0 \text{ tel que } |f^{(m)}(x)| \leq M$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, |f^{(m)}(x)| \leq \max(M, 1)$ . On conclut que  $\forall m \leq n, f^{(m)}$  est uniformément bornée.  $\square$

**Proposition 5.** Si  $f \in C_0^n(\mathbb{R})$  alors

$$g(v, v_0) = \begin{cases} (f(v) - f(v_0))/(v - v_0) & \text{si } v \neq v_0 \\ f'(v_0) & \text{si } v = v_0 \end{cases}$$

$\in C^{n-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

*Démonstration.* Elle se fait par récurrence sur  $n$  : remarquons que  $g(v, v_0) = \int_0^1 f'(v_0 + t(v - v_0)) dt$  si  $f$  est  $C_0^1$ .

•  $\forall (v, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f'(v_0 + t(v - v_0))$  est intégrable car

$$\left| \int_0^1 f'(v_0 + t(v - v_0)) dt \right| \leq \int_0^1 |f'(v_0 + t(v - v_0))| dt \leq \|f'\|_\infty < \infty$$

•  $\forall v \in \mathbb{R}$ , la fonction  $v \mapsto f'(v_0 + t(v - v_0))$  est dérivable et

$$\frac{\partial}{\partial v}(f'(v_0 + t(v - v_0))) = t f''(v_0 + t(v - v_0))$$

De plus,  $|t f''(v_0 + t(v - v_0))| \leq \|f''\|_\infty t$  et  $\|f''\|_\infty \int_0^1 t dt = \|f''\|_\infty / 2 < \infty$ . On conclut par convergence dominée que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(v, v_0) = \int_0^1 t f''(v_0 + t(v - v_0)) dt$$

On procède ainsi de suite jusqu'à l'ordre  $n - 1$ . On a

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial v^{n-1}}(f'(v_0 + t(v - v_0))) = t^{n-1} f^{(n)}(v_0 + t(v - v_0))$$

Or  $|t^{n-1} f^{(n)}(v_0 + t(v - v_0))| \leq \|f^{(n)}\|_\infty t^{n-1}$  et  $\|f^{(n)}\|_\infty \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n} \|f^{(n)}\|_\infty < \infty$ . On conclut par convergence dominée que  $g$  est dérivable jusqu'à l'ordre  $n - 1$  et

$$\frac{\partial^{n-1} g}{\partial v^{n-1}}(v, v_0) = \int_0^1 t^{n-1} f^{(n)}(v_0 + t(v - v_0)) dt$$

$\square$

**Proposition 6.** Supposons que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soit de classe  $C^2$  telle que :

i)  $\varphi(0) = 1$

ii)  $\varphi(v) \leq \frac{c}{v}$

iii)  $\varphi$  paire alors

$$P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\partial_v g - \varphi(v - \xi) \partial_v g(\xi)}{v - \xi}}_{h(v, \xi)} dv$$

*Démonstration.* Etude de la régularité de  $h(v, \xi)$  par rapport à  $v$  et  $\xi$ . Remarquons que :

$$h(v, \xi) = \frac{\partial_v g(v) - \partial_v g(\xi)}{v - \xi} - \frac{\varphi(v - \xi) - \varphi(0)}{v - \xi} \partial_v g(\xi)$$

Or par hypothèse  $g$  et  $\varphi$  sont suffisamment régulières. En appliquant la proposition précédente à  $h(v, \xi)$ , on conclut que  $h$  est dérivable au point  $\xi$  donc continue  $\forall v \in \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $h(v, \xi)$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $\varphi(v) \leq \frac{c}{v}$  alors  $\frac{\varphi(v)}{v} \leq \frac{c}{v^2}$  fonction intégrable au voisinage de l'infini

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g - \varphi(v-\xi)\partial_v g(\xi)}{v-\xi} dv &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\xi-\varepsilon} \frac{\partial_v g - \varphi(v-\xi)\partial_v g(\xi)}{v-\xi} dv + \int_{\xi+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial_v g - \varphi(v-\xi)\partial_v g(\xi)}{v-\xi} dv \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\xi-\varepsilon} \frac{\partial_v g}{v-\xi} dv - \partial_v g(\xi) \int_{-\infty}^{\xi-\varepsilon} \frac{\varphi(v)}{v} dv \right) \\
+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\xi+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v-\xi} dv - \partial_v g(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v} dv \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{\xi-\varepsilon} \frac{\partial_v g}{v-\xi} dv + \int_{\xi+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v-\xi} dv \right) \\
- \partial_v g(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{\xi-\varepsilon} \frac{\varphi(v)}{v} dv + \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\varphi(v)}{v} dv}_{0 \text{ car } \varphi \text{ paire}} \right) &= P.V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_v g}{v-\xi} dv
\end{aligned}$$

□

## 4 Approximation numérique

### 4.1 Méthode du point milieu

Etant donnée un intervalle borné  $[a, b]$ , on cherche à approcher l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$ . La méthode consiste à décomposer l'intervalle  $[a, b]$  en  $M$  intervalles  $[x_{i-1}, x_i]$  de même longueur,  $i = 1, 2, \dots, M$  avec  $a = x_0 < \dots < x_M = b$  et ensuite à approcher chaque intégrale  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$  en remplaçant  $f$  par son polynôme d'interpolation sur l'intervalle  $[x_{i-1}, x_i]$ . On choisit  $x_{i-1/2} \in [x_{i-1}, x_i]$  et on remplace  $f$  sur  $[x_{i-1}, x_i]$  par le polynôme de degré 0 :  $p_0(x) = f(x_{i-1/2})$ ; on a alors :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1/2}),$$

et par suite

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^M (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1/2})$$

qui est une somme de Riemann ou l'on a posé  $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$

**Proposition 7.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in C^{n+1}[a, b]$  alors la méthode du point milieu est au moins d'ordre 2.

*Démonstration.* Soit  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  comme  $f \in C^{n+1}$  on a d'après la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x) = f(x_{i-1/2}) + (x - x_{i-1/2})f'(x_{i-1/2}) + \sum_{k=2}^n \frac{(x - x_{i-1/2})^k}{k!} f^{(k)}(x_{i-1/2}) + O((x - x_{i-1/2})^{n+1})$$

alors, posant  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1/2}) + f'(x_{i-1/2}) \underbrace{\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1/2})dx}_{\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} u du} + \sum_{k=2}^n \frac{f^{(k)}(x_{i-1/2})}{k!} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1/2})^k dx + O(\Delta x)^{n+1}$$

Donc

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(x_{i-1/2})dx = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{f^{(2k+1)}(x_{i-1/2})}{(2k+1)!} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} u^{2k+1} du + \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{f^{(2k)}(x_{i-1/2})}{(2k)!} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} u^{2k} du + O(\Delta x)^{n+1}$$

Or, la fonction  $u \mapsto u^{2k+1}$  est impaire  $\forall k \in \mathbb{N}$  il vient donc que

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} u^{2k+1} du = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} u^{2k} du = \frac{1}{2k+1} \frac{(\Delta x)^{2k+1}}{2^{2k}} \quad \forall k$$

D'où

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(x_{i-1/2}) dx = \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{f^{(2k)}(x_{i-1/2})(\Delta x)^{2k+1}}{(2k+1)!2^{2k}} + O(\Delta x)^{n+1}$$

Puis par sommation,

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^M \Delta x f(x_{i-1/2}) = \frac{(\Delta x)^2}{24} \sum_{i=1}^M \Delta x f''(x_{i-1/2}) + \sum_{k=2}^{[n/2]} \frac{(\Delta x)^{2k}}{(2k+1)!2^{2k}} \sum_{i=1}^M \Delta x f^{(2k)}(x_{i-1/2}) + O(\Delta x)^n \quad (8)$$

Posons  $M_M(f) = \sum_{i=1}^M \Delta x f(x_{i-1/2})$  alors (8) devient :

$$\int_a^b f(x) dx - M_M(f) = \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(\Delta x)^{2k}}{(2k+1)!2^{2k}} M_M(f^{(2k)}) + O(\Delta x)^n$$

or pour  $f^{(2p)}$  on a la même approximation soit,

$$\int_a^b f^{(2p)}(x) dx - M_M(f^{(2p)}) = \sum_{k=1}^{[(n-2p)/2]} \frac{(\Delta x)^{2k}}{(2k+1)!2^{2k}} M_M(f^{(2k+2p)}) + O(\Delta x)^{n-2p}$$

donc

$$M_M(f^{(2p)}) = \int_a^b f^{(2p)}(x) dx - \sum_{k=1}^{[(n-2p)/2]} \frac{(\Delta x)^{2k}}{(2k+1)!2^{2k}} M_M(f^{(2k+2p)}) - O(\Delta x)^{n-2p}$$

Pour  $f \in C^7$ , on a

$$\int_a^b f(x) dx - M_M(f) = \frac{(\Delta x)^2}{3!2^2} M_M(f'') + \frac{(\Delta x)^4}{5!(2^2)^2} M_M(f^{(4)}) + O(\Delta x)^6$$

$$\text{Or } M_M(f'') = \int_a^b f''(x) dx - \frac{(\Delta x)^2}{3!2^2} M_M(f^{(4)}) - O(\Delta x)^4$$

et

$$M_M(f^{(4)}) = \int_a^b f^{(4)}(x) dx - O(\Delta x)^2 = [f'''(b) - f'''(a)] - O(\Delta x)^2$$

Donc

$$\int_a^b f(x) dx - M_M(f) = \frac{(\Delta x)^2}{24} [f'(b) - f'(a)] + \frac{(\Delta x)^4}{24} \left\{ \frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} \right\} [f'''(b) - f'''(a)] + O(\Delta x)^6$$

**Proposition 8.** On suppose que  $f \in C^6$ . Alors la méthode du point milieu est d'ordre 2.

- Si  $f'(b) = f'(a)$ , la méthode est d'ordre 4.
- Si en plus on a  $f'''(b) = f'''(a)$  alors elle est d'ordre 6.

### Reste intégral

Dans le cas où l'on veut majorer le reste intégral on peut procéder comme suit : soient  $R_n^i f, R_n f$  les reste intégral respectifs obtenus en utilisant la formule de Taylor dans chacun des intervalles  $[x_{i-1/2}, x]$  et  $[a, b]$ .

$$\text{On pose } R_n f = \sum_{i=1}^M R_n^i f \quad \text{avec} \quad R_n^i f = \frac{1}{n!} \int_{x_{i-1/2}}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

alors,

$$|R_n^i f| \leq \frac{(\Delta x)^n}{n!} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} |f^{(n+1)}(t)| dt$$

puis, par sommation sur tout les sous-intervalles de  $[a, b]$ , on obtient

$$|R_n f| \leq \sum_{i=1}^M |R_n^i f| \leq \frac{(\Delta x)^n}{n!} \sum_{i=1}^M \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} |f^{(n+1)}(t)| dt = \frac{(\Delta x)^n}{n!} \int_a^b |f^{(n+1)}(t)| dt$$

□

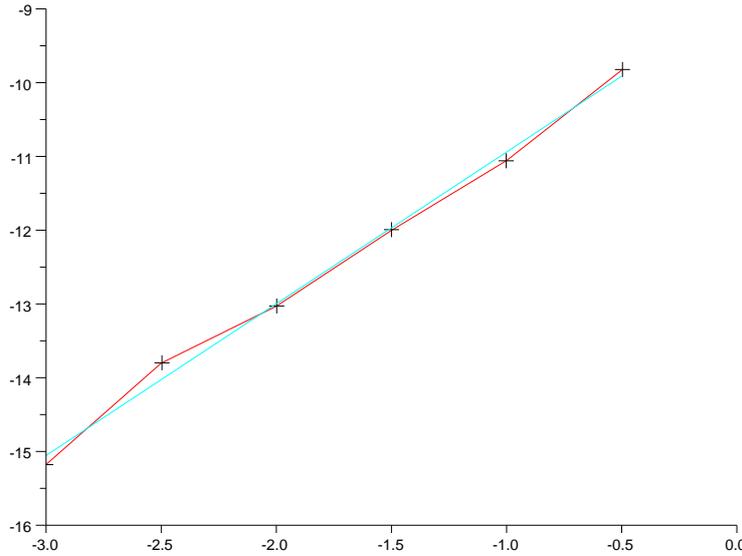


FIGURE 2 – Erreur liée au paramètre  $dx$ . Pour le tracé de l'erreur le graphe s'obtient ici en posant  $\xi = 1$ ,  $dx = 0.001$  et  $M = 7$ . Nous utilisons la fonction  $g(v) = e^{-v^2} + e^{-(v-v_0)^2}$  avec  $v_0 = 2.5$ . La courbe en bleu sur le graphe représente la droite d'équation  $y = ax + b$  passant le plus proche de tous les points. Sa pente  $a \simeq 2$  correspond à l'ordre de la méthode et  $b \simeq 10^{-9}$  de constante minuscule représente le pied de la pente.

## 5 Le critère de Penrose dans une boîte

Ici, on se place dans le cas d'un intervalle fermé borné inclus dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $L > 0$ , et considérons la boîte  $[-\pi L, \pi L]$  de taille  $2\pi L$ . Dans ce cas, l'équation de Vlasov-Poisson devient :

$$(2) \begin{cases} \partial_t f + v \partial_x f - \nabla V(t, x) \partial_v f = 0 \\ -\partial_{xx}^2 V = \rho - \frac{1}{2\pi L} \end{cases}$$

### 5.1 Différence entre transformée de Fourier et séries de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  localement intégrable et absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On définit la transformée de Fourier de  $f$ , la fonction notée  $\hat{f}$  ou  $F(f)$  de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ; et sa transformée inverse de  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

Alors qu'une série de Fourier est définie pour toute fonction périodique  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $[a, b]$  est un sous ensemble fermé borné de  $\mathbb{R}$  et dans ce cas là, on a

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega x}$$

#### Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas complexe

Soit  $f$  une fonction à support compact. On pose  $\text{supp } f = [-\pi L, \pi L]$ , alors on a  $T = 2\pi L$  or  $\omega = 2\pi/T$  il vient donc après simplification que  $\omega = 1/L$ .

On a  $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{k}{L} x}$ .

$$\int_{-\pi L}^{\pi L} f(x) e^{-i \frac{n}{L} x} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\pi L}^{\pi L} e^{i \frac{k-n}{L} x} dx.$$

Or,

$$\int_{-\pi L}^{\pi L} e^{i \frac{k-n}{L} x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi L & \text{si } k = n \end{cases}$$

Les coefficients sont alors donnés par la relation :

$$c_n = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} f(x) e^{-i\frac{n}{L}x} dx = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} f(x) e^{-i\frac{n}{L}x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

D'où

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{k}{L}x} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\pi L}^{\pi L} f(x) e^{-i\frac{k}{L}x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \hat{f}\left(\frac{k}{L}\right)$$

## 5.2 Adaptation de l'argument de Penrose

Par analogie au cas non périodique, nous avons d'une part :

$$\partial_x E_{(g+h)} = \rho_g + \rho_h - \frac{1}{2\pi L} \quad (9)$$

Comme  $\rho_g = c^{te}$ , on suppose dans ce cas que  $c^{te} = \frac{1}{2\pi L}$ . On obtient alors le même système d'équations après linéarisation autour de  $g$ , soit

$$\begin{cases} \partial_t h + v \partial_x h + E_h \partial_v g = 0 \\ \partial_x E_h = \rho_h \end{cases}$$

D'autre part,  $h(t, x, v)$  a un profil d'onde du type  $h(v) e^{i(\frac{k}{L}x - \omega t)}$  ce qui implique la formule de dispersion suivante

$$\frac{k^2}{L^2} = \int_{-\pi L}^{\pi L} \frac{\partial_v g}{v - \omega L/k} dv = Z(\zeta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Proposition 9.** *Si pour tout  $v_0$  minimum de  $g$ , on a*

$$\int_{-\pi L}^{\pi L} \frac{g(v) - g(v_0)}{(v - v_0)^2} dv < \frac{1}{L^2}$$

*alors la solution stationnaire  $g(v)$  n'est pas linéairement instable.*

C'est elle qui garantit la non existence de mode instable dans le cas périodique. Mais ce n'est pas une condition nécessaire, contrairement à ce qui se passe dans le cas non périodique.

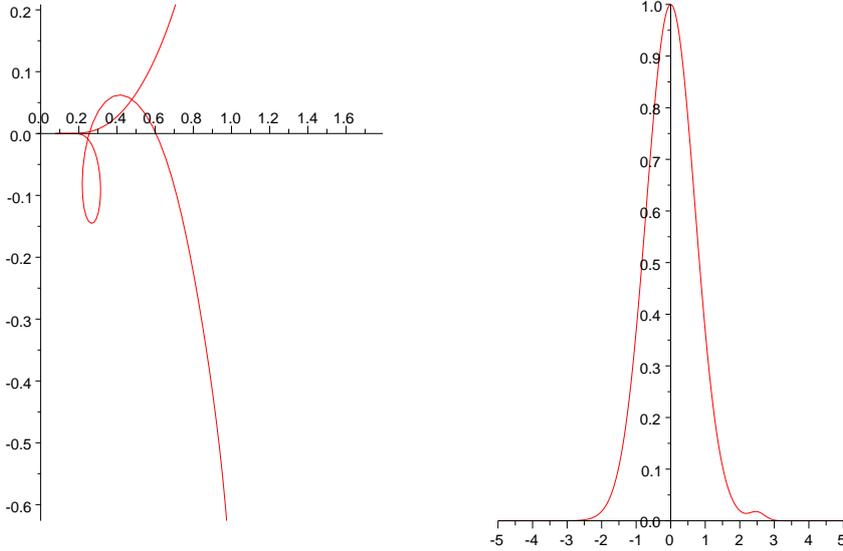


FIGURE 3 – Profil à droite et zoom sur son diagramme de Penrose.

Soit  $[a, b]$  un intervalle d'instabilité (sous ensemble de  $\mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $k^2 \in [a, b]$ ,  $Z(\zeta) = k^2$  a une solution avec  $\text{Im}\zeta > 0$ ). La question qu'on se pose est de savoir s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\left(\frac{k}{L}\right)^2 \in [a, b]$$

Soit  $k \geq 0$  tel que  $\frac{k^2}{L^2} < a$  et  $\frac{(k+1)^2}{L^2} \geq a$

alors,

$$\begin{cases} k^2 \leq aL^2 \\ aL^2 \leq (k+1)^2 \end{cases}$$

l'inéquation (1) implique que  $k < \sqrt{a}L$  et après substitution dans la seconde on obtient :  
 $aL^2 \leq (k+1)^2 \leq aL^2 + 2\sqrt{a}L + 1$

$$\text{Si } aL^2 + 2\sqrt{a}L + 1 \leq bL^2 \quad \text{alors, } \left(\frac{k+1}{L}\right)^2 \in [a, b]$$

donc  $(b-a)L^2 \geq 2\sqrt{a}L + 1$  vrai si  $L$  est assez grand. Le calcul des racines de l'équation  $(b-a)L^2 - 2\sqrt{a}L - 1 = 0$  donne le rang à partir duquel c'est vrai. On a

$$\Delta = 4a + 4(b-a) = 4b > 0$$

nous obtenons deux solutions distincts à savoir :

$$L_1 = -\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$$

Comme  $L$  est positif, on conclut que

$$\text{si } L > \frac{1}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \quad \text{alors il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \left(\frac{k}{L}\right)^2 \in [a, b]$$

D'où la proposition suivante

**Proposition 10.** *Si un profil  $g(v)$  est linéairement instable sur  $\mathbb{R}$  alors il en est de même pour toute boîte de taille  $L$  suffisamment grand.*

### 5.3 Exemples

Dans cette partie on s'intéresse à la figure 4 particulièrement au zoom du diagramme de Penrose. On considère la boîte de taille  $[-\pi L, \pi L]$ , pour différentes valeurs de  $L > 0$ .

( $L = 1$ ) taille de la boîte  $2\pi$ , intervalle d'étude  $[-\pi, \pi]$

Fréquence admissible :  $k, k \in \mathbb{Z}$  existe t'il  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $Z(\zeta) = k^2$  ait une solution avec  $Im\zeta > 0$ . Sur la figure, il n'y a pas d'entier à l'intérieur de la courbe, donc pas de mode instable.

( $L = 2$ ) taille de la boîte  $4\pi$ , intervalle d'étude  $[-2\pi, 2\pi]$

Fréquence admissible :  $k/2, k \in \mathbb{Z}$  existe t'il  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $Z(\zeta) = k^2/4$  ait une solution avec  $Im\zeta > 0$ . Pas clair sur la figure il est donc impossible de répondre avec exactitude.

( $L = \sqrt{2}$ ) taille de la boîte  $2\pi\sqrt{2}$ , intervalle d'étude  $[-\pi\sqrt{2}, \pi\sqrt{2}]$

Fréquence admissible :  $k/\sqrt{2}, k \in \mathbb{Z}$  existe t'il  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $Z(\zeta) = k^2/2$  ait une solution avec  $Im\zeta > 0$ . Oui, il y a un mode instable.

( $L = \sqrt{5}$ ) taille de la boîte  $2\pi\sqrt{5}$ , intervalle d'étude  $[-\pi\sqrt{5}, \pi\sqrt{5}]$

Fréquence admissible :  $k/\sqrt{5}, k \in \mathbb{Z}$  existe t'il  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $Z(\zeta) = k^2/5$  ait une solution avec  $Im\zeta > 0$ . Non, il n'y a pas de mode instable.

### 5.4 Quand la taille $L$ tend vers l'infini

Considerons un intervalle d'instabilité  $[a, b]$ . D'après ce qui précède nous savons que

$$\text{si } L > \frac{1}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \quad (1) \quad \text{alors il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \left(\frac{k}{L}\right)^2 \in [a, b]$$

Puisque  $L \rightarrow +\infty$ , alors pour tout intervalle d'instabilité  $[a, b]$  il existera toujours  $L$  tel que la condition (1) soit vérifiée. On conclut que pour  $L$  suffisamment grand il existera toujours de mode instable.

## A Code numérique

Dans cette partie, nous présentons le code numérique obtenue pour tracer les diagrammes de Penrose. Pour des raisons d'opérations que doit effectuées la machine, nous nous limiterons à des sous ensembles bornés de  $\mathbb{R}$  puis tracerons en échelle logarithmique les erreurs commises d'une part sur les intervalles et d'autre part sur les pas  $dx$ .

```
q=0.05, r=10, x0=2.5
```

```
// Définition de la fonction g
function u=g(x)
    u = exp(-x.^2)           //    exp(-(x-x0).^2)           (1+x.^2).^(-1)
endfunction

// Dérivée de la fonction g
function u=partialg(x)
    u= -2*x*exp(-x.^2)      //    -2*(x-x0)*exp(-(x-x0).^2)      -(2*x)/(1+x.^2)^2
endfunction

// Définition de la fonction g2
function u=g2(x)
    u= exp(-x.^2)+q*r^(-0.5)*exp(-r*(x-x0).^2)
endfunction

// Dérivée de la fonction g2
function u=partialg2(x)
    u=-2*x.*exp(-x.^2)-2*q*sqrt(r)*(x-x0).*exp(-r*(x-x0).^2)
endfunction

// Définition de la fonction phi
function y=phi(x)
    y= exp(-x.^2)           //    exp(-x.^2)           1/(1+x.^2)
endfunction

// Définition de la fonction g associée à phi
function y=f(x,xi)
    y=(partialg(x)-phi(x-xi)*partialg(xi))/(x-xi);
endfunction

// Définition de la fonction g2 associée à phi
function y=f2(x,xi)
    y=(partialg2(x)-phi(x-xi)*partialg2(xi))/(x-xi);
endfunction

// Calcul la valeur principale liée à la fonction g
function I=pv(xi,dx,M)
    I=integrale(f,dx,M)
endfunction

// Calcul la valeur principale liée à la fonction g2
function I=pv2(xi,dx,M)
```

```

    I=integrale(f2,dx,M)
endfunction

// Calcul numérique de l'intégrale par la méthode du point milieu

function I=integrale(f,dx,b)
    N=floor(2*b/dx)
    I=0;
    for i=1:N
        I= I + dx * f(-b+dx*(i- 1/2));
    end
    I = I + (2*b - N*dx )* f(N*dx/2)
endfunction

// Trace la courbe Penrose de la fonction g

function P=penrose(M,dx)
    LR=-M:dx:M
    P=[]
    for xi=LR
        P_temp=[ xi ; pv(xi,dx,2*M); %pi*partialg(xi) ]
        P=[ P , P_temp ]
    end
    scf(0),clf(0);
    subplot(121)
    plot2d( P(2,:),P(3,:),5 )
    subplot(122)
    plot2d(LR,g(LR),5)
endfunction

// Trace la courbe Penrose de la fonction g2

function P=penrose2(M,dx)
    LR=-M:dx:M
    P=[]
    for xi=LR
        P_temp=[ xi ; pv2(xi,dx,2*M); %pi*partialg2(xi) ]
        P=[ P , P_temp ]
    end
    scf(0),clf(0);
    subplot(121)
    plot2d( P(2,:),P(3,:),5 );
    subplot(122)
    plot2d(LR,g2(LR),5)
endfunction

// Trace l'erreur liée au paramètre dx

function [Wvect,a,b]=erreurdx(xi,dx,M)
    Wvect=[]
    PVref=pv(xi,dx/10,M)
    while dx<=1
        PVtemp=pv(xi,dx,M)
        Wtemp=[dx;abs(PVtemp- PVref)]
        Wvect=[Wvect,Wtemp]
        dx=sqrt(10)*dx
    end
    X=log10(Wvect(1,:)), Y=log10(Wvect(2,:))
    clf(); plot2d( X,Y,5 )
    plot2d( X,Y,-1 )
    [a,b]=reglin(X,Y)
endfunction

```

```

    plot2d(X,a*X+b,4)
endfunction

// Trace l'erreur liée au paramètre M

function [Wvect,a,b]=erreurM(xi,dx,M)
    Wvect=[]
    PVref=pv(xi,dx,10*M)
    while M>=9
        PVtemp=pv(xi,dx,M)
        Wtemp=[M;abs(PVtemp- PVref)/abs(PVref)]
        Wvect=[Wvect,Wtemp]
        M=M/sqrt(10)
    end
    X=log10(Wvect(1,:)), Y=log10(Wvect(2,:))
    clf(); plot2d( X,Y,5 )
    plot2d( X,Y,-1 )
    [a,b]=reglin(X,Y)
    plot2d(X,a*X+b,4)
endfunction

```

• Pour le calcul numérique d'une valeur principale, On se fixe un entier  $M > 0$  et on applique la méthode du point milieu à la formule

$$P.V \int_{-M}^M \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv = \int_{-M}^M \frac{\partial_v g - \varphi(v - \xi) \partial_v g(\xi)}{v - \xi} dv$$

avec  $\varphi(v) = e^{-v^2}$  et  $\xi$  on le prend quelconque dans l'intervalle  $[-M, M]$ . La fonction  $g$  est choisie de telle sorte qu'elle soit à décroissance rapide à l'infini.

Pour toute la suite on fixe un entier  $M > 0$

• Numériquement, la fonction penrose est celle qui trace la fonction

$$Z(\xi + i0) = P.V \int_{-M}^M \frac{\partial_v g}{v - \xi} dv + i\pi \partial_v g(\xi)$$

Ici, on se fixe un pas  $dx$  puis on discrétise l'intervalle  $[-M, M]$  en plusieurs sous intervalles de longueur le pas. On se donne une valeur initiale  $P = [ \ ]$  vide qui contiendra les valeurs obtenues pour le tracé de la fonction.  $\xi$  n'est pas pris quelconque dans l'intervalle  $[-M, M]$  mais prend toute les valeurs de la subdivision et pour chacune de ses valeurs on crée un tableau à trois valeurs qui contiendra  $\xi, P.V(\xi, dx, M)$  et  $\pi \partial_v g(\xi)$  puis qu'on associe au tableau précédent.

## B Quelques exemples

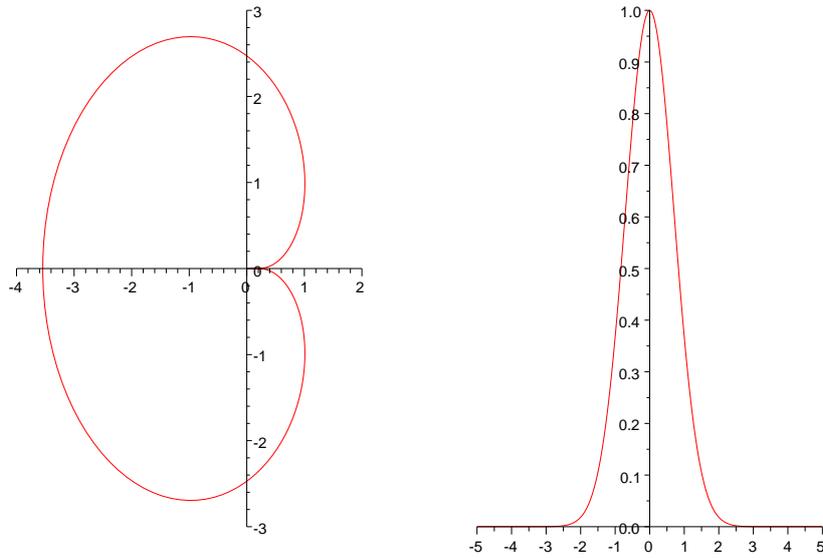


FIGURE 4 – Profil à droite et son diagramme de Penrose à gauche représente la courbe possible de  $Z([-5, 5])$  pour la distribution  $g(v) = e^{-v^2}$ . L'image de la moitié supérieure du plan est l'intérieur de la courbe obtenue pour  $M = 5$  et  $dx = 0.03$ . Elle débute et se termine à l'origine  $z = 0$ .

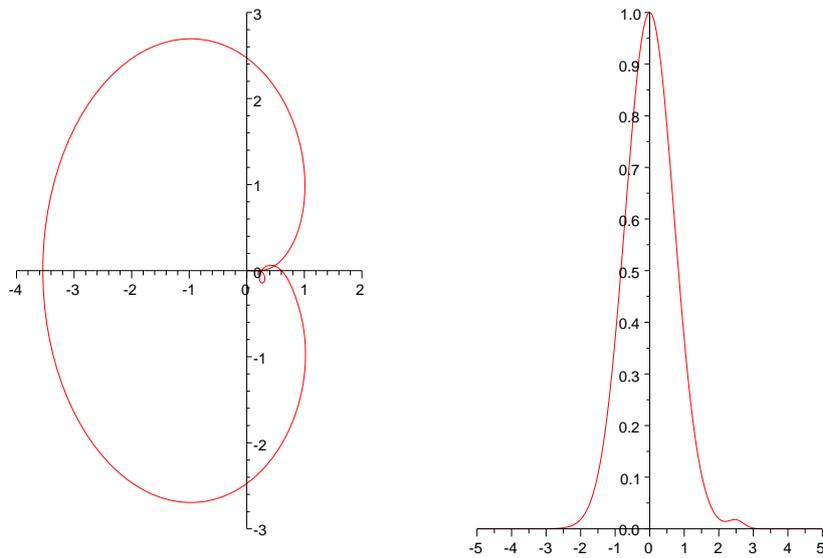


FIGURE 5 – Profil à droite et son diagramme de Penrose à gauche représente la courbe possible de  $Z([-5, 5])$  pour la distribution  $g(v) = e^{-v^2} + qe^{-r(v-v_0)^2}$ , avec  $v_0 = 2.5$ ,  $q = 0.05$  et  $r = 10$ . L'image de la moitié supérieure du plan est à l'intérieur de la courbe obtenue pour  $M = 5$  et  $dx = 0.03$ . Elle inclut vraiment des valeurs réelles positives car  $Z([-5, 5])$  entoure la partie de l'axe  $z$  réel positif

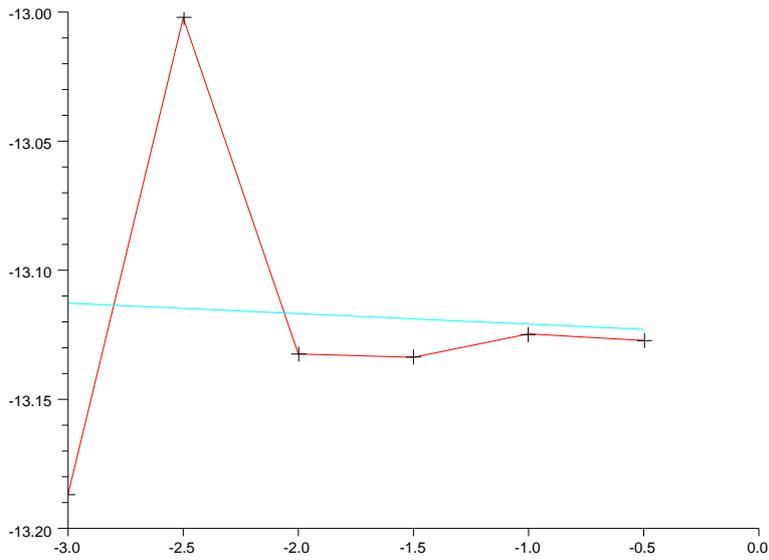


FIGURE 6 – Erreur liée au paramètre  $dx$ . Pour le tracé de l’erreur le graphe s’obtient ici en posant  $\xi = 1$ ,  $dx = 0.001$  et  $M = 10$ . Nous utilisons la fonction  $g(v) = e^{-v^2} + e^{-(v-v_0)^2}$  avec  $v_0 = 2.5$ . La courbe en bleu sur le graphe représente la droite d’équation  $y = ax + b$  passant le plus proche de tout les points. Sa pente  $a \simeq -0.004$  est presque nulle et  $b \simeq 10^{-13}$  de constante minuscule représente le pied de la pente. Dans ce cas là, l’ordre de la méthode est meilleur que celle obtenue avec  $M = 7$

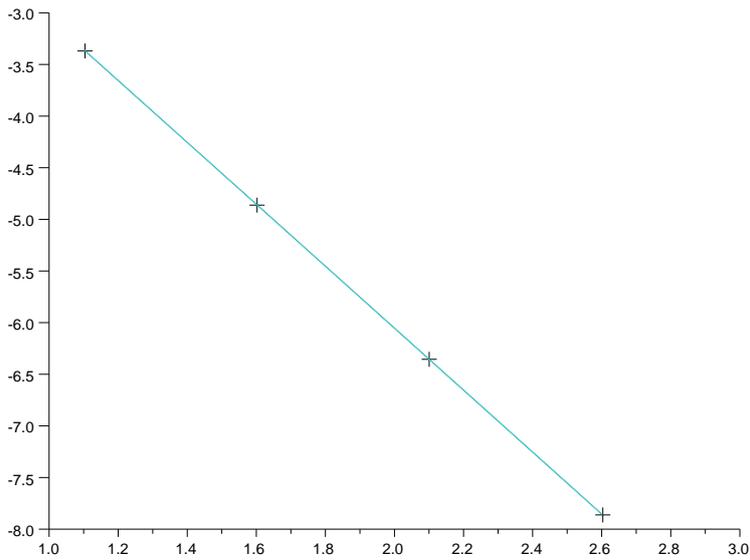


FIGURE 7 – Erreur liée au paramètre  $M$ . Pour le tracé de l’erreur le graphe s’obtient ici en posant  $\xi = 0.5$ ,  $dx = 0.1$  et  $M = 400$ . Nous utilisons la fonction  $g(v) = 1/(1+x^2)$ . La pente de la droite  $a \simeq -3$  et son pied  $b \simeq -0.06$ .

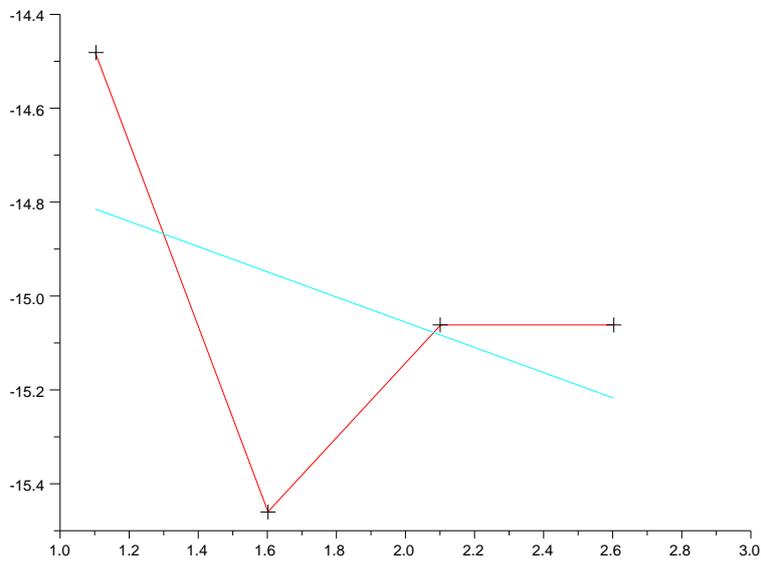


FIGURE 8 – Erreur liée au paramètre  $M$ . Ici, nous utilisons le même profil que celui utilisé pour l'erreur  $dx$  à savoir la fonction  $g(v) = e^{-v^2} + e^{-(v-v_0)^2}$  avec  $v_0 = 2.5$ . Le graphe est obtenu en posant  $\xi = 1$ ,  $dx = 0.1$  et  $M = 400$ . La pente de la droite  $a \simeq -0.27$  est quasiment nulle et son pied  $b$  est de l'ordre de  $10^{-15}$  ce qui permet de conclure que l'erreur liée au paramètre  $M$  n'est pas importante ici.