C. R. Acad. Sci. Paris

Solutions périodiques des équations d'évolution

Mihai Bostan

M.B. : Le Primavera 9 av. Tourre 06600 Antibes, mbostan@amadeus.net

---

Résumé - *Nous présentons la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions périodiques des équations d'évolution dans le cas des opérateurs linéaires non-bornés, maximal monotones et symétriques. Nous montrons aussi une estimation du temps de convergence vers les régimes périodiques en dimension finie.*

Periodic solutions for evolution equations

Abstract - *We study here the necessary and sufficient condition for the existence of periodic solutions for evolution equations in the case of linear not-bounded maximal monotonous and symmetric operators. We present also an estimate of the convergence time to the periodic states in the finite dimensional case.*

---

1 Introduction

Des nombreuses applications de la Physique Mathématique reposent sur la simulation des régimes périodiques. On rappelle entre autre les tubes à décharge ou les diodes à vide soumises à un potentiel harmonique modélisés par les équations de Vlasov-Maxwell ou de Vlasov-Poisson ainsi que tout phénomène de propagation d'onde électromagnétique décrit par les équations de Maxwell. Nous nous sommes intéressés à l'existence de la solution périodique pour le système de Vlasov-Poisson ([3] et [4]) ainsi que pour le système de Vlasov-Maxwell ([5]). Au cours de ces études une nouvelle méthode, dite de l'*Absorption Limite* a été développée afin de réduire le temps de convergence vers les régimes périodiques (voir [6]). Dans cette note on se propose d'étudier d'avantage cette méthode. Plus précisément nous cherchons l'hypothèse minimale sous laquelle une équation d'évolution avec un terme source périodique en temps admet des solutions périodiques. Dans un premier temps nous avons étudié le cas des opérateurs linéaires, positifs et symétriques. Signalons cependant que ces résultats peuvent se généraliser pour des fonctions croissantes arbitraires ($Ax = g(x)$) en une dimension.

2 Équations d'évolution périodiques

Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert. Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non-borné maximal ($Range(I + A) = H$) monotone ($(Ax, x) \geq 0 \forall x \in D(A)$) et $f \in C^1(I\!R, H)$ une fonction T-périodique en temps. On étudie l'existence des solutions périodiques de l'équation d'évolution suivante :

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), \quad t \in I\!R. \tag{1}$$

Supposons d'abord qu'il existe une solution périodique pour cette équation. En tenant compte du fait que le graphe d'un opérateur maximal monotone est fermé par intégration sur $[0, T]$ on déduit :

$$\int_0^T f(t)dt = A\left(\int_0^T x(t)dt\right), \tag{2}$$

ou bien :

$$< f > := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = A\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\right) = A < x > . \tag{3}$$

Donc une condition nécessaire pour l'existence de la solution périodique est donnée par :

$$< f > := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \in Range(A). \tag{4}$$

Malheureusement même en dimension finie cette condition n'est pas suffisante. Pour cela il suffit de considérer la rotation orthogonale en deux dimensions $A(x, y) = (-y, x)$, $\forall (x, y) \in I\!R^2$. Bien que la condition (4) soit satisfaite, puisque cet opérateur est surjectif, on remarquera que pour $(f(t), g(t)) = (\cos t, -\sin t)$ il n'existe pas de solution 2π-périodique. Cette condition est toute même suffisante dans le cas des opérateurs symétriques. La démonstration de ce résultat s'appuie sur la méthode de l'*Absorption Limite* qui consiste à perturber l'équation d'origine par un terme $\alpha \cdot x(t)$, $\alpha > 0$.

Théorème - *Supposons que A est linéaire maximal monotone symétrique et $f \in C^1(I\!R, H)$ est une fonction T-périodique. Alors l'équation (1) admet des solutions périodiques ssi $< f > \in Range(A)$ (autrement dit ssi il existe des solutions pour l'équation stationnaire associée à un terme source équivalent à la moyenne du terme source périodique).*

Démonstration - En tenant compte de l'observation précédente, la condition est nécessaire. Montrons maintenant qu'elle est aussi suffisante. Pour cela nous allons considérer les solutions périodiques uniques des équations perturbées (existence et unicité assurées par le théorème du point fixe de Banach appliqué à l'opérateur $\alpha I + A$):

$$\alpha \cdot x_\alpha(t) + x'_\alpha(t) + Ax_\alpha(t) = f(t), \quad t \in I\!R. \tag{5}$$

Si on multiplie (5) par $x'_\alpha(t)$, après intégration sur $[0, T]$ on obtient :

$$\int_0^T \alpha(x_\alpha(t), x'_\alpha(t))dt + \int_0^T \|x'_\alpha(t)\|^2 dt + \int_0^T (Ax_\alpha(t), x'_\alpha(t))dt = \int_0^T (f(t), x'_\alpha(t))dt. \tag{6}$$

En tenant compte de la symétrie de l'opérateur A et de la périodicité de x_α on vérifie aisément que :

$$\int_0^T \alpha(x_\alpha(t), x'_\alpha(t))dt + \int_0^T (Ax_\alpha(t), x'_\alpha(t))dt = \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\alpha\|x_\alpha(t)\|^2 + (Ax_\alpha(t), x_\alpha(t))\right)dt = 0, \tag{7}$$

d'où on déduit :

$$\min_{t\in[0,T]} \|x'_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{T}}\|x'_\alpha\|_{L^2(]0,T[,H)} \leq \frac{1}{\sqrt{T}}\|f\|_{L^2(]0,T[,H)}. \tag{8}$$

Puisque l'opérateur A est linéaire on peut dériver l'équation (5) par rapport au temps ce qui conduit à :

$$\alpha \cdot x'_\alpha(t) + x''_\alpha(t) + Ax'_\alpha(t) = f'(t), \quad t \in I\!R, \tag{9}$$

et après multiplication par $x'_\alpha(t)$ on trouve :

$$\|x'_\alpha(t)\| \;\; \leq \;\; \|x'_\alpha(s)\| + \int_s^t \|f'(\tau)\| d\tau, \quad s \leq t, \quad s,t \in I\!R,\ \alpha > 0. \tag{10}$$

Finalement, en utilisant (8) et (10) il résulte :

$$\|x'_\alpha\|_{L^\infty([0,T],H)} \leq \frac{1}{\sqrt{T}}\|f\|_{L^2(]0,T[,H)} + \|f'\|_{L^1(]0,T[,H)}. \tag{11}$$

Comme précédemment on a aussi $\alpha < x_\alpha > +A < x_\alpha >=< f >$. En utilisant l'hypothèse $< f >= Ax_0, x_0 \in D(A)$ et la monotonie de A, après la multiplication par $< x_\alpha > -x_0$ on trouve $\| < x_\alpha > \| \leq \|x_0\|, \forall \alpha > 0$ (on peut montrer même que la suite $(< x_\alpha >)_{\alpha>0}$ est convergente dans H vers l'élément de norme minimale de $A^{-1} < f >$). Maintenant il est clair que $(x_\alpha)_{\alpha>0}$ et $(x'_\alpha)_{\alpha>0}$ sont uniformément bornés dans $L^\infty([0,T],H)$ puisque :

$$\|x_\alpha(t) - < x_\alpha > \| = \;\; = \;\; \|\frac{1}{T}\int_0^T \int_s^t x'_\alpha(\tau) d\tau ds\| \leq \sqrt{T}\|f\|_{L^2(]0,T[,H)} + T\|f'\|_{L^1(]0,T[,H)}.$$

En effet on peut montrer que les suites $(x_\alpha)_{\alpha>0}$ et $(x'_\alpha)_{\alpha>0}$ sont convergentes dans $C([0,T],H)$. Montrons d'abord que $(x'_\alpha)_{\alpha>0}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T],H)$. Puisque l'opérateur A est linéaire on peut écrire :

$$\alpha \cdot (x_\alpha(t) - x_\beta(t)) + x'_\alpha(t) - x'_\beta(t) + A(x_\alpha(t) - x_\beta(t)) = -(\alpha - \beta)x_\beta(t),\ t \in I\!R,\ \alpha, \beta > 0,$$

d'où, comme précédemment, on déduit :

$$\|x'_\alpha - x'_\beta\|_{L^\infty([0,T],H)} \leq \frac{1}{\sqrt{T}}\|(\alpha-\beta)x_\beta\|_{L^2(]0,T[,H)} + \|(\alpha-\beta)x'_\beta\|_{L^1(]0,T[,H)} \leq |\alpha - \beta| \cdot Const,$$

et donc $(x'_\alpha)_{\alpha>0}$ a une limite dans $C([0,T],H)$. Finalement, puisqu'on sait déjà que la suite des moyennes $(< x_\alpha >)_{\alpha>0}$ est convergente, on déduit que $(x_\alpha)_{\alpha>0}$ est aussi une suite convergente dans $C([0,T],H)$ vers une solution périodique de (1).

En dimension un le résultat est plus général, il est aussi valable dans le cas non-linéaire :

Théorème - *Soit $g : I\!R \to I\!R$ une fonction continue, lipschitzienne et croissante, $f : I\!R \to I\!R$ continue T-périodique. Alors l'équation :*

$$x'(t) + g(x(t)) = f(t), t \in I\!R,$$

admet des solutions périodiques ssi $< f >\in g(I\!R)$. Si g est strictement croissante la solution est unique.

Nous renvoyons à [7] pour les détails de démonstration. Montrons maintenant comment on peut adapter ce résultat aux problèmes avec conditions limites.
Proposition - *Soit* $f \in C^1(\mathbb{R}, L^2(0,1))$, $g_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $g_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *des fonctions* T*-périodiques. Alors le problème instationnaire :*

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \partial_x^2 u = f(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times (0,1) \\ &\partial_x u(t,0) = g_0(t), \quad \partial_x u(t,1) = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{12}$$

admet des solutions périodiques ssi il existe des solutions pour le problème stationnaire :

$$\begin{aligned} &-U''(x) =< f(\cdot,x) >:= \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)dt, \quad x \in (0,1) \\ &U'(0) =< g_0 >:= \frac{1}{T}\int_0^T g_0(t)dt, \quad U'(1) =< g_1 >:= \frac{1}{T}\int_0^T g_1(t)dt, \end{aligned} \tag{13}$$

et par conséquent ssi $\int_0^T g_1(t)dt = \int_0^T g_0(t)dt - \int_0^T \int_0^1 f(t,x)dxdt$.
Démonstration - En posant $u = v + u_0$ où $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, H^2(0,1))$ est une fonction périodique vérifiant les conditions limites (on peut considérer $u_0(t,x) = (x - \frac{x^2}{2})g_0(t) + \frac{x^2}{2}g_1(t)$) on se ramène à une équation d'évolution :

$$\frac{dv}{dt} - \partial_x^2 v(t) = f(t) - \partial_t u_0 + \partial_x^2 u_0(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

où $-\partial_x^2 : \{w \in H^2(0,1) | w'(0) = w'(1) = 0\} \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$. En utilisant le théorème précédent on déduit que cette équation admet des solutions périodiques ssi il existe une solution stationnaire $V \in H^2(0,1)$ pour $-V'' =< f > + < u_0 >''$ avec $V'(0) = V'(1) = 0$ ou bien $-(V+ < u_0 >)'' =< f >$ avec $(V+ < u_0 >)'(0) = V'(0)+ < u_0'(0) >=< g_0 >$ et $(V+ < u_0 >)'(1) = V'(1)+ < u_0'(1) >=< g_1 >$.

3 Estimation du temps de convergence

Dans ce paragraphe nous allons analyser la convergence de la méthode de l'*Absorption Limite*. On s'intéressera à la résolution de l'équation :

$$x'(t) + \varepsilon A x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre, $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positif définie $((Ax,x) \geq m\|x\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^d, m > 0)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ vérifie $< f >= 0$. En général la solution périodique de cette équation peut se calculer en choisissant une donnée initiale arbitraire $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et en passant à la limite pour t vers l'infini :

$$x(t) = \exp^{-t\varepsilon A} x_0 + \int_0^t \exp^{-(t-s)\varepsilon A} f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

On remarquera que le temps de convergence vers une η-approximation du régime périodique x_∞ est de l'ordre de $\mathcal{O}(\frac{1}{m\varepsilon}\ln(\|x_0 - x_\infty(0)\|/\eta))$ ce qui demande un volume de calcul très important pour des petites valeurs du paramètre ε. Voyons ce qui se passe maintenant en utilisant l'*Absorption Limite*. Considérons l'équation perturbée :

$$\alpha(t) \cdot x(t) + x'(t) + \varepsilon A x(t) = f(t), \quad t \in I\!R, \tag{17}$$

où cette fois-ci α est une fonction positive décroissante. On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme - *Soit $\alpha : I\!R \to I\!R^+$ une fonction décroissante telle que : (i) $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$ et (ii) $\int_0^\infty \alpha(t) < \infty$. Alors la solution de (17) converge vers une solution périodique de (15).*

Comme fonction d'absorption nous allons choisir une fonction constante par périodes, $\alpha(nT+t) = \alpha_n, \forall t \in [0, T[$. Nous procédons de la manière suivante : on se donne $\alpha_0 > 0$ et pour $n > 0$ $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ si $\|x((n+1)T) - x(nT)\| \geq \eta$, autrement $\alpha_{n+1} = \alpha_n \exp^{-T}$. Dans ces conditions on peut montrer qu'on se place dans les hypothèses du lemme précédent et un plus le temps de convergence vers une $\sqrt{\eta}$-approximation est de l'ordre de $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \ln(1/\eta))$ et donc indépendant par rapport à ε Cette méthode a été appliquée avec succés pour la résolution numérique des équations de Maxwell ou Vlasov-Maxwell. Elle a permis notamment le calcul des solutions périodiques après un nombre réduit de périodes (voir [6]).

References

[1] Barbu V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff (1976).

[2] Brézis H., *Analyse fonctionnelle*, Masson.

[3] Bostan M. et Poupaud F., *Solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson avec conditions aux limites*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.325, Série I, p.1333-1336, 1997, Physique mathématique.

[4] Bostan M. and Poupaud F., *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS) Vol 10 No.5(2000), p.651-672.

[5] Bostan M. and Poupaud F., *Periodic solutions of the 1D Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Mathematical Methods in the Applied Sciences (M2AS), 23(2000), p.1195-1221.

[6] Bostan M., *Numerical study by a controllability method for the calculation of the time periodic solutions of the Maxwell and Vlasov-Maxwell systems* , Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), Vol.35, No.1, 2001, p.165-189.

[7] Bostan M., *Periodic solutions for evolution equations*, à paraître.