Solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson avec conditions aux limites

Mihai Bostan et Frédéric Poupaud

Résumé - *Nous montrons l'existence de solutions périodiques du système de Vlasov-Poisson en une dimension d'espace, sous certaines conditions reliant la norme des données entrantes, leur support et le potentiel appliqué.*

Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions

Abstract - *We study here the 1D Vlasov-Poisson system with time periodic boundary conditions. We prove the existence for time periodic solutions. The crucial assumption is that the particles are injected with velocity large enough with respect to the electric field, so that every particle cross the domain in a finite time.*

1 Introduction

La modlisation de dispositifs tels que les tubes dcharge ou les diodes vide soumises un potentiel harmonique repose sur les quations de Vlasov-Maxwell ou de Vlasov-Poisson en rgime priodique. Ces quations sont relativement bien comprises en ce qui concerne les problmes de Cauchy dans l'espace tout entier: solutions classiques pour Vlasov-Poisson, cf [6], [7], solutions faibles pour Vlasov-Maxwell, cf [10]. Cependant, la simulation de dispositifs reposent sur des problmes aux limites. Des solutions faibles Vlasov-Poisson ont t obtenues dans [8] et dans [4] pour Vlasov-Maxwell. Signalons qu'il existe des difficults obtenir des solutions classiques pour Vlasov-Poisson avec conditions aux limites. Dans un cas particulier, un rsultat est obtenu dans [3]. Ce qui est particulirement intressant au niveau des applications est la modlisation des rgimes permanents. Ces rgimes permanents sont caractriss par des solutions stationnaires ou priodiques. Le cas stationnaire a dj t tudi tout d'abord pour Vlasov-Poisson en une dimension 1 d'espace dans [1] puis en dimension quelconque et pour Vlasov-Maxwell dans [2]. Des rsultats dans le cas priodique semblent inexistants. D'autre part, ces rgimes sont trs difficilement atteints lors des simulations numriques. Il parait donc ncessaire d'en avoir une meilleure comprhension. Ce travail est un premier pas dans cette direction.

2 Equation de Vlasov. Définitions

On tudie les solutions T-priodiques du problme de Vlasov suivant:

$$\partial_t f + v \cdot \partial_x f + E(t,x) \cdot \partial_v f = 0, \quad \forall \ (t,x,v) \in I\!\!R \times]0,1[\times I\!\!R, \tag{1}$$

$$f(t,0,v) = g_0(t,v), \quad \forall \ (t,v) \in I\!\!R \times]0,+\infty[, \tag{2}$$

$$f(t,1,v) = g_1(t,v), \quad \forall \ (t,v) \in I\!\!R \times]-\infty,0[. \tag{3}$$

Pour dfinir les solutions faibles ce problme, on introduit l'espace des fonctions test:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} \;&=\; \{\varphi \in C^1(I\!R \times [0,1] \times I\!R); \varphi(t,1,v) = 0, \forall (t,v) \in I\!R \times]0,+\infty[, \\
&\quad \varphi(t,0,v) = 0, \forall (t,v) \in I\!R \times]-\infty,0[, \varphi(t+T,\cdot,\cdot) = \varphi(t,\cdot,\cdot)\}
\end{aligned} \tag{4}$$

et on suppose que les donnes vrifient:

$$\begin{aligned}
&v \cdot g_0 \in L^1_{loc}(I\!R \times]0,+\infty[), \qquad v \cdot g_1 \in L^1_{loc}(I\!R \times]-\infty,0[), \\
&E \in L^\infty(I\!R \times [0,1]), E, g_0, g_1 \text{ sont T-priodiques en temps.}
\end{aligned} \tag{5}$$

On introduit les dfinitions suivantes:

Dfinition 1 *Sous les hypothses (5) on dit que* $f \in L^1_{loc}(I\!R \times]0,1[\times I\!R)$ *est solution faible priodique du problme de Vlasov (1), (2), (3) ssi* f *est* T *priodique et vrifie:*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^1 \int_{I\!R} \quad & f(t,x,v)(\partial_t \varphi + v \cdot \partial_x \varphi + E \cdot \partial_v \varphi) dv dx dt = \\
&= \int_0^T \int_{-\infty}^0 v \cdot g_1(t,v) \cdot \varphi(t,1,v) dv dt - \\
&- \int_0^T \int_0^\infty v \cdot g_0(t,v) \cdot \varphi(t,0,v) dv dt, \forall \varphi \in \mathcal{V}.
\end{aligned} \tag{6}$$

On n'a malheureusement pas d'unicit de la solution faible priodique pour deux raisons. D'une part sous la seule hypothse $E \in L^\infty$ les caractristiques de l'quation (1) ne sont pas dfinies de manire unique. D'autre part, mme dans le cas o les caractristiques sont dfinies sans ambiguït, la fonction f prend des valeurs arbitraires sur les caractristiques qui ne rencontrent pas le bord du domaine. On doit donc dfinir une notion plus restrictive de solution. On fait les hypothses supplmentaires:

$$E \in C^0(I\!R \times [0,1]), \exists L > 0 \, t.q. \, |E(t,x) - E(t,y)| \le L \cdot |x-y| \; \forall t \in I\!R, \forall x,y \in [0,1]. \tag{7}$$

On dfinit alors les caractristiques issues du bord du domaine $X^{0,1}(t;s,v)$, $V^{0,1}(t;s,v)$ par:

$$\frac{dX^{0,1}}{dt} = V^{0,1}, \qquad \frac{dV^{0,1}}{dt} = E(t, X^{0,1}), \quad t \ge s, \tag{8}$$

$$X^0(s;s,v) = 0, \quad V^0(s;s,v) = v, \quad s \in I\!R, \quad v \in]0,+\infty[, \tag{9}$$

$$X^1(s;s,v) = 1, \quad V^1(s;s,v) = v, \quad s \in I\!R, \quad v \in]-\infty,0[. \tag{10}$$

On note $\tau^{0,1}(s,v)$ le temps maximal d'existence dans l'ouvert $]0,1[\times I\!R$ des caractristiques $X^{0,1}(\cdot;s,v)$.

Dfinition 2 *Sous les hypothses (5), (7), la solution par caractristiques, priodique, minimale* $f \in L^1_{loc}(I\!R \times]0,1[\times I\!R)$ *est la fonction dfinie par:* $\forall \psi \in C^0_c(I\!R \times]0,1[\times I\!R)$*:*

$$\begin{aligned}
< f,\psi > \;&=\; \int_0^T \int_0^1 \int_{I\!R} f(t,x,v) \cdot \psi(t,x,v) dv dx dt = \\
&- \int_0^T \int_{-\infty}^0 v \cdot g_1(t,v) \int_0^{\tau^1(t,v)} \psi(\sigma, X^1(\sigma;t,v), V^1(\sigma;t,v)) d\sigma dt dv \\
&+ \int_0^T \int_0^\infty v \cdot g_0(t,v) \int_0^{\tau^0(t,v)} \psi(\sigma, X^0(\sigma;t,v), V^0(\sigma;t,v)) d\sigma dt dv,
\end{aligned}$$

o C_c^0 dsigne l'espace des fonctions continues support compact.

En utilisant que $X^{0,1}(\sigma+T;t+T,v) = X^{0,1}(\sigma;t,v)$,$V^{0,1}(\sigma+T;t+T,v) = V^{0,1}(\sigma;t,v)$, on vrifie aisment que la fonction dfinie implicitement dans la dfinition 2 est priodique. On remarque aussi que f est nulle sur les caractristiques ne rencontrant pas le bord, d'o le terme solution minimale. Ce type de solution a t tout d'abord introduit pour l'tude des solutions stationnaires, cf [2], [5]. Le lemme suivant permet de donner une majoration des temps de sortie des caractristiques issues du bord:

Lemme 1 *Soit* $\|E\|_\infty = \sup_{(t,x)\in I\!R\times[0,1]} |E(t,x)|$. *Si* $v^2 \geq 4\cdot\|E\|_\infty$ *alors* $\tau^0(s,v) - s \leq 2/v$ *pour* $v > 0$ *et* $\tau^1(s,v) - s \leq 2/|v|$ *pour* $v < 0$.

3 Système de Vlasov-Poisson

Le problme de Vlasov-Poisson est constitu des quations (1), (2), (3) compltes par:

$$E(t,x) = -\partial_x\varphi(t,x), \qquad \varphi(t,0) = \varphi_0(t), \qquad \varphi(t,1) = \varphi_1(t) \tag{11}$$

$$-\partial^2_{xx}\varphi(t,x) = \rho(t,x) := \int_{I\!R} f(t,x,v)dv. \tag{12}$$

Les donnes φ_0,φ_1 vrifient:

$$\varphi_{0,1} \in L^\infty(I\!R), \qquad \varphi_{0,1} \text{ est T-priodique.} \tag{13}$$

Le point cl pour obtenir des solutions priodiques au systme (1),(2), (3),(11)et (12) est de borner les temps de sortie des trajectoires issues du bord avec des vitesses dans le support de $g_{0,1}$. Cela permet d'obtenir des estimations sur la densit ρ. Des arguments classiques de point fixe permettent de conclure. Pour ce faire, on fait les hypothses suivantes:

$$supp(g_0) \subset I\!R\times[v_0,v_1], \qquad supp(g_1) \subset I\!R\times[-v_1,-v_0], \tag{14}$$

$$\|g_{0,1}\|_{L^\infty(I\!R\times I\!R)} \leq M. \tag{15}$$

On suppose $v_0^2 \geq 4\cdot\|E\|_\infty$; les temps de sortie tant borns, par le lemme 1 on en dduit que si $v > v_0$, $|V^0(t;s,v)| < v + 2\cdot\|E\|_\infty/v$ avec une borne identique pour v^1. Si f est la solution minimale donne par la dfinition 2, on montre alors aisement que:

$$\|f\|_{L^\infty(I\!R\times]0,1[\times I\!R)} \leq M, supp(f) \subset I\!R\times]0,1[\times]-v_m,v_m[, \tag{16}$$

avec $v_m = v_1 + 2\cdot\|E\|_\infty/v_1$. Cela donne immdiatement une borne sur ρ et E:

$$\|\rho\|_{L^\infty(I\!R\times]0,1[)} \leq 2\cdot M\cdot(v_1 + 2\cdot\|E\|_\infty/v_1), \tag{17}$$

$$\|E\|_{L^\infty(I\!R\times]0,1[)} \leq \|\varphi_1-\varphi_0\|_{L^\infty(I\!R)} + 3\cdot M\cdot(v_1 + 2\cdot\|E\|_\infty/v_1). \tag{18}$$

On en dduit:

Thorme *Sous les hypothses (13),(14), (15), avec les conditions suplmentaires:*

$$M \leq v_1/12, \qquad \|\varphi_1 - \varphi_0\|_{L^\infty(I\!R)} + 3 \cdot M \cdot v_1 \leq v_0^2/4, \tag{19}$$

le systme de Vlasov-Poisson (1),(2), (3),(11)et (12) admet une solution priodique (f,φ) *o* $E = -\partial_x \varphi$ *vrifie (7) et o* f *est solution par caractristiques, priodique, minimale du problme de Vlasov. De plus, si les normes* $\|\nabla g_{0,1}\|_\infty$ *sont suffisamment petites et dans la classe des fonctions vrifiant les proprits ci dessus, la solution est unique.*

Remarque La condition (19) permet d'assurer que les particules sortent en temps fini du domaine.

Nous renvoyons [9] pour les dtails de dmonstration. Signalons qu'il est possible d'adapter ce type d'arguments dans le cas multidimensionnel. On perd alors le fait que f est solution par caractristiques mais on obtient tout de mme l'existence de solution faible (f,φ) o f rsout Vlasov au sens de la dfinition 1, cf [9].

Références

[1] C. Greengard and P.A. Raviart, *A boundary value problem for the stationary Vlasov-Poisson system*, Comm. Pure and Appl. Math. XLIII(1990), pp. 473-507.

[2] F. Poupaud, *Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell system*, Forum Math., 4(1992), pp. 499-527.

[3] Y. Guo, *Regularity for the Vlasov equation in a half space*, Indiana Univ. Math. J. 43(1994), pp 255-320.

[4] Y. Guo, *Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Comm. Math. Phys. 154(1993), pp. 245-263.

[5] B. Bodin, *Modlisation et simulation numrique du rgime de Child-Langmuir*, Thse de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau (1995).

[6] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in 3 dimensions for general initial data*, J. Diff. Eq. 95(1992), pp. 281-303.

[7] P.L. Lions and B. Perthame *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system*, Invent. Math. 105(1991), pp. 415-430.

[8] N. Ben.Abdallah *Weak solutions of the initial-boundary value problem for the Vlasov-Poisson system*, Preprint.

[9] M. Bostan and F. Poupaud, *Periodic solutions of the Vlasov-Poisson system with boundary conditions*, Manuscrit, paraître.

[10] R. J. Diperna et P. L. Lions, *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell system*, Comm. Pure Appl. Math. XVII(1989), pp. 729-757.