Modèles aléatoires

Mohamed Boutahar
Institut de Mathématiques de Luminy

6 septembre 2021

Table des matières

I Calcul stochastique **5**

1 Espérance conditionnelle **7**

1.1 Définitions . . . 7

1.1.1 Tribu . . . 7

1.1.2 Mesurabilité . . . 7

1.1.3 Probabilité conditionnelle . . . 8

1.1.4 Espérance conditionnelle dans L^2 . . . 8

1.1.5 Espérance conditionnelle dans L^1. . . . 8

1.1.6 Cas des variables continues. . . . 9

1.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle . . . 10

1.3 Théorème de Radon-Nikodym . . . 11

1.4 Exercices . . . 12

2 Processus stochastiques **13**

2.1 Définitions . . . 13

2.2 Martingales . . . 15

2.3 Le mouvement Brownien . . . 16

2.3.1 Le mouvement Brownien multidimensionnel . . . 16

2.4 Processus de Levy . . . 17

2.5 Exercices . . . 18

3 Intégrale stochastique **21**

3.1 Intégrale d'Itô . . . 21

3.1.1 Cas de processus étagé . . . 21

3.1.2 Cas général . . . 22

3.2 Formule d'Itô . . . 26

3.2.1 Formule d'Itô multidimensionnel . . . 27

3.3 Intégration par partie . . . 27

3.4 Exercices 28

4 Equations différentielles stochastiques 31
4.0.1 Equations différentielles homogènes 32
4.0.2 Solution faible 32
4.0.3 Propriété de Markov 33
4.0.4 Théorème de Girsanov 34
4.1 Quelques équations du monde de la finance 34
4.1.1 Modèle de Black & Scholes 34
4.1.2 Modèle de Vasicek 35
4.1.3 Modèle CIR 35
4.2 Exercices 35

5

Première partie

Calcul stochastique

Chapitre 1

Espérance conditionnelle

1.1 Définitions

1.1.1 Tribu

Soit Ω un espace (ou ensemble), soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de Ω.

DÉFINITION **1** *On dit que $\mathcal{F}$ est une **tribu** (ou σ-**algèbre**) sur Ω si les conditions suivantes sont satisfaites :*
i. $\emptyset$ et Ω sont dans $\mathcal{F}$,
ii. Si A est dans $\mathcal{F}$, alors A^c est dans $\mathcal{F}$, où A^c est le complémentaire de A dans Ω.
iii. Si $(A_n, n \geq 1)$ est dans $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ est dans $\mathcal{F}$.

1.1.2 Mesurabilité

DÉFINITION **2** *Une variable aléatoire (v.a.) réelle X est mesurable par rapport à une tribu $\mathcal{F}$ si $X^{-1}(\mathcal{B}) = \{A, X(A) \in \mathcal{B}\} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne contenant les ouverts de $\mathbb{R}$.*

On dit aussi que X est $\mathcal{F}$-mesurable.

DÉFINITION **3** *Soit Y une variable aléatoire $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. La tribu engendrée par la v.a. Y est*

$$\sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{B}^n) = \{A \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{B}^n, Y(A) = B\}$$

THÉORÈME **1** *Soit Y un vecteur aléatoire à valeurs $\mathbb{R}^p$. La variable X est mesurable par rapport à $\sigma(Y)$ ssi il existe une fonction borélienne (i.e. mesurable) g sur $\mathbb{R}^p$ telle que $X = g(Y)$.*

1.1.3 Probabilité conditionnelle

DÉFINITION **4** *Soit A et B deux événements de $\mathcal{F}$, avec $P(B) \neq 0$. La* ***probabilité conditionnelle*** *de A sachant B est définie par*

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}.$$

1.1.4 Espérance conditionnelle dans L^2

Soit $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de Hilbert (c'est à dire l'espace des variables aléatoires de carré intégrable) muni du produit scalaire :

$$< X, Y >= E(XY).$$

DÉFINITION **5** *Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. L'espérance conditionnelle de X sachant Y, noté $E(X \mid Y)$, est l'unique élément $\hat{X} \in L^2(\Omega, \sigma(Y), P)$ tel que*

$$E(XZ) = E(\hat{X}Z) \;\; \forall \;\; Z \in L^2(\Omega, \sigma(Y), P)$$

$L^2(\Omega, \sigma(Y), P)$ est le sous espace de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ formé par les variables aléatoires de carré intégrable et $\sigma(Y)$-mesurable.

DÉFINITION **6** *Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une tribu. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, noté $E(X \mid \mathcal{G})$, est l'unique élément $\hat{X} \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{G}$-mesurable et tel que*

$$E(XZ) = E(\hat{X}Z) \;\; \forall \;\; Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

1.1.5 Espérance conditionnelle dans L^1.

DÉFINITION **7** *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une tribu. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, noté $E(X \mid \mathcal{G})$, est l'unique élément $\hat{X} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tel que*

$$E(XZ) = E(\hat{X}Z) \text{ pour toute v.a. } Z \text{ bornée } \mathcal{G}\text{-mesurable.}$$

1.1.6 Cas des variables continues.

DÉFINITION **8** *Soient X et Y deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ tels que $Z = (X, Y)$ admette la densité $f_{X,Y}(x, y)$. La densité conditionnelle de X sachant $Y = y$ est définie par*

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & si\ f_Y(y) > 0 \\ \\ 0 \quad si\ f_Y(y) = 0. \end{cases}, \tag{1.1}$$

où $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f_{X,Y}(x, y)dx$ est la densité marginale de Y.

Posons

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}^p} g(x, y) f_{X|Y}(x \mid y)dx, \tag{1.2}$$

$h(y)$ est l'espérance conditionnelle de $g(X, Y)$ sachant que $Y = y$.
L'espérance conditionnelle de $g(X, Y)$ sachant Y est

$$E(g(X, Y) \mid Y) = h(Y).$$

Exemple . On suppose que (X, Y) suit une loi uniforme sur le domaine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y \geq x\right\}.$$

On a $f_{(X,Y)}(x, y) = K = 2$, car $\int_D f_{(X,Y)}(x, y)dxdy = 1$.
$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y, \quad f_X(x) = \int_x^1 2dy = 2(1 - x)$.

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } x \in [0, y] \\ \\ 0 & \text{si } x \notin [0, y]. \end{cases} \tag{1.3}$$

$$h(y) = E(X \mid Y = y) = \int_0^y \frac{x}{y}dx = y/2.$$

On a $$E(X \mid Y) = Y/2, E(X) = 1/3;$$

$$E(X \mid Y = 1/2) = 1/4, \;\; E(X \mid Y = 1) = 1/2.$$

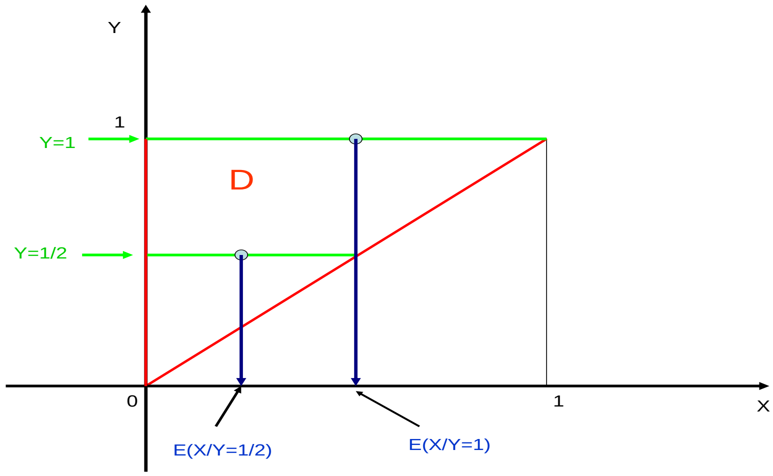

FIGURE 1.1 –

1.2 Propriétés de l'espérance conditionnelle

1) Linéarité. Soit a et b deux constantes. $E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G})$.

2) Croissance. Soit X et Y deux v. a. telles que $X \leq Y$. Alors $E(X \mid \mathcal{G}) \leq E(Y \mid \mathcal{G})$.

3) Espérance imbriquée. $E[E(X \mid \mathcal{G})] = E(X)$.

4) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $E(X \mid \mathcal{G}) = X$.

5) Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, $E(XY \mid \mathcal{G}) = YE(X \mid \mathcal{G})$.

6) Si X est indépendante de $\mathcal{G}, E(X \mid \mathcal{G}) = E(X)$.

7) Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ alors $E(X \mid \mathcal{G}) = E(E(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = E(E(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H})$.

8) Si ϕ est une fonction convexe, alors $\phi\left(E(X \mid \mathcal{G})\right) \leq E(\phi(X) \mid \mathcal{G})$.

1.3 Théorème de Radon-Nikodym

DÉFINITION **9** *Soit P_1 et P_2 deux mesures de probabilités. On dit que P_1 domine P_2 si P_2 est absolument continue par rapport à P_1, noté $P_2 \ll P_1$, c'est à dire que pour tout $A \in \mathcal{F}$ tels que $P_1(A) = 0$, on a $P_2(A) = 0$,*

THÉORÈME **2** *Soit P une mesure de probabilité et μ une mesure finie. Si $P \ll \mu$, alors il existe une v.a. non négative f (presque sûrment unique) telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$*

$$P(A) = \int_A f(\omega) d\mu(\omega),$$

On note $f = \frac{dP}{d\mu}$ (f étant la densité de P par rapport à μ).
Exemple. P est la mesure de Gauss centrée réduite sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que pour tout intervalle $]a, b[$

$$P(]a, b[) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt,$$

et μ est la mesure de Lebesgue, c'est à dire que $d\mu(t) = dt$.

THÉORÈME **3** *(Autre version) Soient P et Q deux probabilités définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$. Alors $P \ll Q$ si et seulement si il existe une variable $Z \geq 0$ $\mathcal{F}$-mesurable et d'espérance 1 sous Q telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$,*

$$P(A) = E_Q(Z \mathbf{1}_A) \tag{1.4}$$
$$= \int_A Z(\omega) dQ(\omega) \tag{1.5}$$

On appelle Z la densité de Radon-Nikodym de P par rapport à Q et on écrit $dP = Z dQ$ ou encore $Z = \frac{dP}{dQ}$.

1_A est la fonction indicatrice de A c'est à dire que

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.4 Exercices

Exercice 1. Montrer que si $X \in L^2, E(X \mid \mathcal{G}) = Y$ et $E(X^2 \mid \mathcal{G}) = Y^2$ alors $X = Y p.s.$

Exercice 2. Soit X, Y deux v.a. telles que la v.a. $X - Y$ est indépendante de $\mathcal{G}$, d'espérance m et de variance σ^2. On suppose que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Calculer $E(X - Y \mid \mathcal{G})$. En déduire $E(X \mid \mathcal{G})$. Calculer $E((X - Y)^2 \mid \mathcal{G})$. En déduire $E(X^2 \mid \mathcal{G})$.

Exercice 3. Soit $X = X_1 + X_2$. On suppose que X_1 est indépendante de $\mathcal{G}$, que X_2 est $\mathcal{G}$-mesurable et que X_1 est gaussienne.

1. Calculer $E(X \mid \mathcal{G})$ et $var(X \mid \mathcal{G})$.
2. Calculer $E(e^{\lambda X} \mid \mathcal{G})$.

Exercice 4 Soit Z_1, Z_2 deux variables aléatoires de carré intégrable. On définit

$$Cov(Z1, Z_2 \mid \mathcal{G}) = E(Z_1 Z_2 \mid \mathcal{G}) - E(Z_1 \mid \mathcal{G}) E(Z_2 \mid \mathcal{G}).$$

Montrer que

$$Cov(Z_1, Z_2 \mid \mathcal{G}) = E[(Z_1 - E(Z_1 \mid \mathcal{G})) Z_2 \mid \mathcal{G}].$$

Exercice 5 Soit $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ deux tribus indépendantes, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ et $(X_i, i = 1, 2)$ deux variables aléatoires bornées telles que X_i est $\mathcal{G}_i$-mesurable. Montrer que $E(X_1 X_2 \mid \mathcal{G}) = X_1 X_2$.

Exercice 6 Soit f et g deux densités strictement positives sur $\mathbb{R}$. Soit X une v.a. de densité f sur un espace (Ω, P). Montrer qu'il existe une probabilité Q sur cet espace telle que X soit de densité g.

Chapitre 2

Processus stochastiques

2.1 Définitions

Définition **10** *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires* $\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ *,. Dans le cas où* $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ *ou* $\mathbb{R}$ *on dit que le processus est à temps continu. Si* $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ *ou* $\mathbb{Z}$ *on parle alors de processus à temps discret. Dans ce dernier cas, on dit que* X_t *est une série temporelle ou série chronologique.*

Remarque. Un processus aléatoire modélise l'évolution au cours du temps d'une quantité aléatoire : température, indice boursier,..

Définition **11** *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilté et* $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+$ *ou* $\mathbb{R}$ *On appelle filtration toute suite croissante de tribus* $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *incluses dans* $\mathcal{F}$

Définition **12** *On appelle filtration naturelle du processus* X_t *la suite croissante de tribus*

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t).$$

Définition **13** $(\Omega, \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité filtré si* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un espace de probabilité et* $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T}\}$ *est une filtration.*

Loi du processus
La loi du processus est la donnée des lois jointes de $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ pour toutes les suites finies d'instants $t_1, ..., t_k$. Elle nous permet, par exemple de calculer

$$P\left(X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_k} \in B_k\right), E(X_{t_1}), cov(X_{t_1}, X_{t_2})...$$

Processus adapté

DÉFINITION **14** *On dit que le processus X_t est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{T})$ si $\forall t, X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Trajectoire du processus
Un processus stochastique peut être définit comme une fonction aléatoire qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe la fonction, appelée aussi trajectoire,

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

Temps d'arrêt
Dans un jeu de hasard, un temps d'arrêt est un temps lors duquel le joueur décide d'arrêter de jouer, selon un critère ne dépendant que du passé et du présent. Il peut par exemple décider d'arrêter de jouer dès qu'il a gagné une certaine somme. Le joueur doit à tout moment pouvoir décider s'il arrête ou non.

DÉFINITION **15** *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus stochastique et $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ la filtration naturelle. Une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{T} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si*

$$\forall t < \infty, \ \{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Sa tribu associée est donnée par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}, \forall \ t \in \ \mathbb{T}, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ signifie qu'à l'instant t, on sait si on s'est arrêté ou non. Mais on ne sait pas encore si on va s'arrêter avant une date ultérieure $t+s$: $\{\tau \leq t+s\} \notin \mathcal{F}_t$.

Exemple. Supposons que X_t soit réel, et soit B un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors le temps de première atteinte de B

$$\tau_B = \inf\{t \in \mathbb{T} : X_t \in B\}$$

est un temps d'arrêt.
Processus arrêté .
Soit $(F_t)_t$ un une filtration, (X_t) un processus adapté à la filtration et τ un temps d'arrêt. On appelle processus arrêté en τ le processus $X_t^{(\tau)}$ défini par (qu'on note aussi $X_{\tau\wedge t}$) $X_t^{(\tau)} = X_{\tau\wedge t}$; avec $\tau \wedge t = \min(\tau, t)$. Si par exemple τ est le temps de première atteinte d'un ensemble B, alors $X_{\tau\wedge t}$ est le processus obtenu en gelant X à l'endroit où il atteint B pour la première fois.

2.2 Martingales

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieur est égal à la somme gagnée au moment présent.

DÉFINITION **16** *Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et intégrable pour tout $t \in \mathbb{T}$.*
1. X est une martingale si $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s\ \forall s \leq t$, si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ l'égalité devient $E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. X est une sur-martingale si $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s\ \forall s \leq t$, ($E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \leq X_n$ dans le cas discret).
3. X est une sous-martingale si $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s\ \forall s \leq t$, ($E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n$ dans le cas discret)

DÉFINITION **17** *Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. On dit que le processus est prévisible si*

$$X_0 = 0, X_n \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} - \text{mesurable}.$$

Exemple. Urne de Polya : On considère une urne contenant r boules rouges et v boules vertes. De manière répétée, on tire une boule de l'urne, puis on la remet en ajoutant un nombre fixé c de boules de la même couleur. Soit r_n le nombre de boules rouges après le nième tirage, v_n le nombre de boules vertes, et $X_n = r_n/(r_n + v_n)$ la proportion de boules rouges. On a

$$X_{n+1} = \begin{cases} \frac{r_n+c}{r_n+v_n+c} & \text{avec probabilité } \frac{r_n}{r_n+v_n} = X_n \\ \\ \frac{r_n}{r_n+v_n+c} & \text{avec probabilité } \frac{v_n}{r_n+v_n} = 1 - X_n \end{cases}$$

$$E(X_{n+1}|X_n) = \frac{r_n + c}{(r_n + v_n + c)}\frac{r_n}{(r_n + v_n)} + \frac{r_n}{(r_n + v_n + c)}\frac{v_n}{(r_n + v_n)} = X_n.$$

La suite (X_n) est donc une martingale (par rapport à la filtration naturelle).

THÉORÈME **4** *Soit $(X_n)_n$ une surmartingale et H_n un processus prévisible, non négatif et borné pour tout n. Alors $(H.X)_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1})$ est une surmartingale.*

THÉORÈME **5** *Soit $(X_n)_n$ une martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$, et soit ϕ une fonction convexe. Alors $\phi(X_n)$ est une sous-martingale par rapport à $\mathcal{F}_n$.*

THÉORÈME **6** *Décomposition de Doob. Soit $X = (X_n)_n$ un processus adapté et intégrable. Alors X écrit d'une manière unique comme $X_n = M_n + A_n$, où M_n est une martingale et A_n est un processus prévisible avec $A_0 = 0$.*
Le processus A_n est non-décroissant (i.e $A_n \leq A_{n+1}$) ssi X est une sous-martingale.

2.3 Le mouvement Brownien

DÉFINITION **18** *un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est dit gaussien, si pour toute suite d'instants $t_1, ..., t_r$ dans $\mathbb{T}$ le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, ..., X_{t_r})$ est gaussien.*

DÉFINITION **19** *Le mouvement Brownien standard ou processus de Wiener standard est le processus stochastique $(B_t)_{t>0}$ satisfaisant :*
1.$B_0 = 0$ presque sûrement;
2. Accroissements indépendants et stationnaires, pour tout $t > s > 0, B_t - B_s$ est indépendant de $(B_u)_{u\leq s}$;
3. Accroissements gaussiens : pour tout $t > s > 0, B_t - B_s$ suit une loi normale $N(0, t-s)$ de moyenne 0 et de variance $t-s$.

Remarque. X_t est dit stationnaire si pour tout suite d'instants $t_1, ..., t_r \in \mathbb{T}$ et $h \in \mathbb{T}$, les vecteurs $(X_{t_1}, ..., X_{t_r})$ et $(X_{t_1+h}, ..., X_{t_r+h})$ ont la même loi.

2.3.1 Le mouvement Brownien multidimensionnel

DÉFINITION **20** *On dit que le processus $B_t = (B_t^1, ..., B_t^d)$ est un mouvement Brownien d-dimensionnel si les processus $B_t^1, ..., B_t^d$ sont des mouvements Browniens standards indépendants.*

Continuité d'un processus stochastique
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

DÉFINITION **21** *On dit que le processus stochastique $(X_t)_{t\in I}$ est continu à droite (resp. à gauche) si l'application $t \to X_t$ est continue à droite (resp. à gauche) presque sûrement, c'est à dire que pour tout $\omega \notin N$ avec $P(N) = 0, t \to X_t(\omega)$ est continue à droite (resp. à gauche)*

DÉFINITION **22** *On dit que le processus stochastique* $(X_t)_{t\in I}$ *est presque sûrement continu si l'application* $t \to X_t$ *est continue presque sûrement.*

DÉFINITION **23** *On dit que le processus stochastique* $(X_t)_{t\in I}$ *est continu en probabilité si*

$$\forall \epsilon > 0 \lim_{h\to 0} P\left(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon\right) = 0.$$

DÉFINITION **24** *On dit que le processus stochastique* $(X_t)_{t\in I}$ *est continu en moyenne quadratique si*

$$\lim_{h\to 0} E\left(|X_{t+h} - X_t|^2\right) = 0.$$

DÉFINITION **25** *Soient* X *et* Y *deux processus stochastiques.*
On dit que X *et* Y *sont des versions (on dit aussi modifications) l'un de l'autre si*

$$P\left(X_t = Y_t\right) = 1, \ \forall t \in I.$$

On dit que X *et* Y *sont indistinguables si*

$$P\left(\cap_{t\in I}\left\{X_t = Y_t\right\}\right) = 1.$$

THÉORÈME **7** *Soit* X *un processus stochastique. On suppose qu'il existe* $\gamma, \delta, K > 0$ *telles que*

$$E\left(|X_{t+h} - X_t|^{\gamma}\right) \leq K h^{1+\delta} \quad \forall t, h,$$

alors X *admet une version presque sûrement continue.*

2.4 Processus de Levy

DÉFINITION **26** *Un processus stochastique* X *est un processus de Levy si*
1.$X_0 = 0$ *presque sûrement ;*
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq t_0 < .... < t_n$, *les variables aléatoires* $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
3.Pour tout $t, h \geq 0$, *on a*

$$X_{t+h} - X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_h - X_0.$$

4.$\forall t \geq 0, \epsilon > 0$,

$$\lim_{s\to t} P\left(|X_s - X_t| > \epsilon\right) = 0.$$

5. X *est un processus càdlàg c'est à dire que les trajectoires* $(X_t(\omega), t \in \mathbb{R}^+)$ *sont continues à droite et admettent une limite à gauche, pour tout* $\omega \notin N, P(N) = 0$.

2.5 Exercices

Exercice 1. Démontrer les théorèmes 4 et 5.
Exercice 2 Soit X une v.a. intégrable et $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une filtration. Montrer que $(E(X \mid \mathcal{F}_t), t \geq 0)$ est une martingale.
Exercice 3. Surmartingale.
Montrer que si M est une martingale et A un processus croissant adapté $(A_s \leq A_t, \forall s \leq t)$ alors $M - A$ est une surmartingale.
Exercice 4 Soit $(X_t, t \in [0,T])$ une martingale telle que $X_T = \zeta$. Exprimer X_t en fonction de ζ pour $t < T$.
Exercice 5 Soit $(M_t, t \geq 0)$ une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable. Montrer que
1. $E((M_t - M_s)^2) \mid \mathcal{F}_s) = E(M_t^2 \mid \mathcal{F}_s) - M_s^2$ pour $t > s$.
2. $E((M_t - M_s)^2) = E(M_t^2) - E(M_s^2)$ pour $t > s$.
3. La fonction Φ définie par $\Phi(t) = E(M_t^2)$ est croissante.
Exercice 6 Soit X un processus stationnaire à accroissements indépendants, c'est-à-dire tel que, pour $t > s$, la v.a. $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma(X_u, u \leq s)$.
Montrer que si pour tout t la v.a. X_t est intégrable, X est une martingale et que si X est de carré intégrable, $X_t^2 - E(X_t^2)$ est une martingale.
Montrer que, si $e^{\lambda X_t}$ est intégrable, $M_t = e^{\lambda X_t}/E(e^{\lambda X_t})$ est une martingale.
Exercice 7 Tribu associée à un temps d'arrêt. Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que $\mathcal{F}_\tau$ est une tribu.
Exercice 8 Soit τ un temps d'arrêt et ν une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable, vérifiant $\nu \geq \tau$. Montrer que ν est un temps d'arrêt.
Exercice 9 Comparaison de tribus. Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt tels que $\tau_1 \leq \tau_2$. Montrer que $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.
Exercice 10 Montrer que le min (resp. le max) de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt.
Exercice 11 1. Calculer pour tout couple (s,t) les quantités $E(B_s B_t^2), E(B_t \mid \mathcal{F}_s), E(B_t|B_s)$ et $E(e^{\lambda B_t} \mid \mathcal{F}_s)$.
2 On admet que si $Z \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$ on a $E(Z^4) = 3\sigma^4$; calculer $E(B_t^2 B_s^2)$.
3. Quelle est la loi de $B_t + B_s$?
4. Soit θ_s une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_s$-mesurable. Calculer pour $t \geq s, E(\theta_s(B_t - B_s))$ et $E[\theta_s(B_t - B_s)^2]$.
Exercice 12 Soit B_t un mouvement Brownien.
1. Montrer que $B_t^2 - t$ est une martingale.
2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer que $exp(\gamma B_t - \gamma^2 t/2)$ est une martingale.

Exercice 13 Le pont Brownien. On définit le pont Brownien par

$$Z_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1,$$

avec B_t un mouvement Brownien standard.
1. Montrer que Z est un processus Gaussien indépendant de B_1. Préciser sa loi.
2. Montrer que le processus $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$ a même loi que Z_t.
3. Montrer que le processus Y définit par $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}, 0 < t < 1$ a même loi que Z.

Chapitre 3

Intégrale stochastique

3.1 Intégrale d'Itô

3.1.1 Cas de processus étagé

On dit qu'un processus Θ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels $t_j ; 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variables aléatoires θ_j telles que θ_j soit $\mathcal{F}_{t_j}$- mesurable, appartienne à $L^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_j$ pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}[$, soit

$$\Theta_s(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}[}(s). \tag{3.1}$$

On définit alors

$$\int_0^{\infty} \Theta_s dB_s = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j} \right).$$

On a

$$E\left(\int_0^{\infty} \theta_s dB_s \right) = 0,$$

3.1.2 Cas général

Idée générale. Pour une fonction $f(t,\omega)$, $t \in [a,b]$, on définit la partition

$$t_j = t_j^{(n)} = \begin{cases} j/2^n & \text{si} \quad a \le j/2^n \le b \\ a \quad \text{si} & \quad j/2^n < a \\ b \quad \text{si} & \quad j/2^n > b \end{cases} \tag{3.2}$$

La fonction $f(t,\omega)$ peut alors être approchée par

$$\sum_{j\ge 0} f(t_j^*,\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}[}(t),$$

et l'intégrale $\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega)$ est définie par

$$\int_a^b f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j^*,\omega)\left(B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)\right).$$

Remarque. En général $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}[$
1. Si $t_j^* = t_j$ on obtient alors l'intégrale d'Itô (c'est ce choix que nous allons considérer).
2. Si $t_j^* = (t_j + t_{j+1})/2$ on obtient alors l'intégrale de Stratonovich.
3. Le choix $t_j^* = t_{j+1}$ ne convient pas, car on obtient des intégrales non centrées. En effet

$$E\left(\sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{j+1}}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right) = b.$$

Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \le s \le t)$ la tribu engendrée par le mouvement Brownien (information que nous possédons en observant la trajectoire du mouvement sur l'intervalle $[0,t]$).

On considère la classe $\mathbf{A}[a,b]$ des fonctions f définies sur $[a,b]\times\Omega$ vérifiant :
1.f est $\mathcal{B}(]a,b[)\times\mathcal{F}$-mesurable.
2. $f(t) = f(t,.)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
3. $E\left(\int_a^b f^2(t)dt\right) < \infty$.

Remarque. Pour $t \in [a,b]$ fixé la variable aléatoire $f(t) = f(t, .)$ est définie par $f(t)(\omega) = f(t,\omega)$.
Si $f(t,\omega)$ est étagée donnée par (3.1) alors $f \in \mathbf{A}(a,b)$ et donc l'intégrale d'Itô est donnée par

$$I(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right).$$

THÉORÈME **8** *Si $f(t,\omega)$ est étagée et bornée alors*

$$E\left(\left(\int_a^b f(s)dB_s\right)^2\right) = E\left(\int_a^b f^2(s)ds\right).$$

Pour une fonction quelconque $f \in \mathbf{A}(a,b)$, on peut trouver une suite de fonction élémentaires $g_n(t,\omega) = g_n(t)(\omega)$ (voir Annexe) telle que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\int_a^b (f-g_n)^2(t)dt\right) = 0.$$

On pose alors

$$I(f) = \int_a^b f(t)dB_t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(t)dB_t.$$

La limite est prise dans $L^2(\Omega)$.
Le théorème garantit la convergence dans $L^2(\Omega)$ de $\int_a^b g_n(t)dB_t$, (car c'est une suite de Cauchy et $L^2(\Omega)$ est complet).

THÉORÈME **9** *(Isométrie) Pour deux fonctions $f,g \in \boldsymbol{A}(a,b)$ on a*

$$E\left(\left(\int_a^b f(s)dB_s\right)\left(\int_a^b g(s)dB_s\right)\right) = E\left(\int_a^b f(s)g(s)ds\right).$$

En particulier pour $f \in \boldsymbol{A}(a,b)$ on a

$$E\left(\left(\int_a^b f(s)dB_s\right)^2\right) = E\left(\int_a^b f^2(s)ds\right).$$

Quelques propriétés.
Soient α et β deux constantes f_1 et f_2 deux fonctions $\in$ $\mathbf{A}(0,T)$. Alors

$$\alpha \int_0^T f_1(s)dB_s + \beta \int_0^T f_2(s)dB_s = \int_0^T (\alpha f_1(s) + \beta f_2(s))dB_s;$$

$$\int_0^T f_1(s)dB_s = \int_0^t f_1(s)dB_s + \int_t^T f_1(s)dB_s \text{ pour } t \in [0,T].$$

PROPOSITION **1** *Pour tout* $f \in$ $\boldsymbol{A}(a,b)$ *on a*

$$E\left(\int_a^b f(s)dB_s\right) = 0$$

La variable aléatoire $\int_0^T f(s)dB_s$ *est* $\mathcal{F}_T$*-mesurable*

PROPOSITION **2** *Pour tout* $f \in$ $\boldsymbol{A}(0,T)$ *Alors* $M_t = \int_0^T f(s)dB_s$ *est une martingale par rapport à la filtration du mouvement Brownien* $\mathcal{F}_t$.

THÉORÈME **10** *Soit* M_t *une martinagle par rapport à la filtration du mouvement Brownien* $\mathcal{F}_t$ *de carré intégrable. Alors il existe une unique fonction* $m \in$ $\boldsymbol{A}(0,t)$ *pour tout* $t \geq 0$ *telle que*

$$M_t = E(M_0) + \int_0^t m(s)dB_s.$$

THÉORÈME **11** *Soit* $T > 0$, *et* $Z \in L^2(\mathcal{F}_T, P)$. *Il existe un unique processus* $z \in$ $\boldsymbol{A}(0,T)$ *tel que*

$$Z = E(Z) + \int_0^T z(s)dB_s.$$

Exemple. Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$.
Posons

$$g_n(s,\omega) = g_n(s)(\omega) = \sum_{j\geq 0} B_{t_j}(\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}[}(s),$$

où les t_j sont données par (3.2) avec $a = 0$ et $b = t$

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t (g_n(s) - B_s)^2 ds\right) &= \sum_{j\geq 0} E\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_{t_j} - B_s)^2 ds\right) \\ &= \sum_{j\geq 0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j)^2 ds \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\geq 0}(t_{j+1} - t_j)^2 \\ &\leq t/2^n, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n\to\infty} \int_0^t g_n(s) dB_s \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq 0} B_{t_j}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} 2\sum_{j\geq 0} B_{t_j}\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) &= \sum_{j\geq 0} B^2_{t_{j+1}} - B^2_{t_j} - (B^2_{t_{j+1}} - B^2_{t_j})^2 \\ &= B_t^2 - \sum_{j\geq 0}(B^2_{t_{j+1}} - B^2_{t_j})^2 \end{aligned}$$

de plus

$$\sum_{j\geq 0}(B^2_{t_{j+1}} - B^2_{t_j})^2 \xrightarrow{L^2} t,$$

donc

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}. \tag{3.3}$$

Si F est une fonction déterministe avec $F(0) = 0$. Comme $d(F^2(s))/ds = 2F(s)dF(s)/ds$ on déduit que l'intégrale de Riemann-Stieljes est donnée par

$$\int_0^t F(s)dF(s) = \frac{F^2(t)}{2}.$$

Dans le cas stochastique le terme supplémentaire $-t/2$ provient du fait que les trajectoires du mouvement Brownien sont irrégulières et nulle part différentiables.

3.2 Formule d'Itô

DÉFINITION **27** *Un processus X est un processus d'Itô si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s dB_s + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

que l'on écrit souvent

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t. \tag{3.4}$$

Posons $\mathbf{A}_d = \cap_{T>0} \mathbf{A}_d(0,T)$ où $f \in \mathbf{A}_d(a,b)$ si
1.f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}$-mesurable.
2. $f(t)$ est $\mathcal{F}_t$ adaptée.
3. $P\left(\omega, \int_a^b f^2(t,\omega)dt < \infty\right) = 1$.
Le coefficient μ est la dérive, σ est le coefficient de diffusion, ils vérifient les conditions suivantes :
C_1. $\mu(t)$ est $\mathcal{F}_t$ adaptée et $P\left(\cap_{t>0}\left\{\int_0^t |\mu(s,\omega)|\, ds < \infty\right\}\right) = 1$.
C_2. $\sigma \in \mathbf{A}_d$ et $P\left(\cap_{t>0}\left\{\int_0^t \sigma^2(s,\omega)ds < \infty\right\}\right) = 1$.

THÉORÈME **12** *Soit X le processus d'Itô donné par (3.4). Soit $f(t,x)$ une fonction de $C^2(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$. dans $\mathbb{R}$. Alors le processus $Y_t = f(t,X_t)$ est aussi un processus d'Itô avec*

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t).(dX_t) \tag{3.5}$$

avec la règle de multiplication

$$dt.dt = dt.dB_t = 0, dB_t.dB_t = dt.$$

Exemple. Si on prends dans (3.4) $\mu_t = 0$ et $\sigma_t = 1$ c'est à dire que $X_t = B_t$, en appliquant la formule (3.5) avec $f(t,x) = x^2$ on obtient

$$d(B_t^2) = 2B_t dB_t + dt,$$

donc

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t,$$

et obtient facilement la formule (3.3).

3.2.1 Formule d'Itô multidimensionnel

Soit $B_t = (B_t^{(1)}, ..., B_t^{(d)})$ un mouvement Brownien d-dimensionnel.

DÉFINITION **28** *Un processus $X_t = (X_t^{(1)}, ..., X_t^{(p)})$ est un processus d'Itô de dimension p si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t U_s ds + \int_0^t \Sigma_s dB_s \tag{3.6}$$

Avec $U_t = (\mu_t^{(1)}, ..., \mu_t^{(p)})$ un vecteur tel que chaque terme $\mu_t^{(j)}$ vérifie la condition C_1 ci-desssus.
$\Sigma_t = (\sigma_t(i,j))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq d}$ est une matrice telle que chaque terme $\sigma_t(i,j)$ vérifie la condition C_2 ci-desssus.

THÉORÈME **13** *Soit X le processus d'Itô donné par (3.6). Soit $f(t,x) = (f_1(t,x), ..., f_q(t,x))$ une fonction de $C^2(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^p)$ dans $\mathbb{R}^q$. Alors le processus $Y_t = f(t, X_t)$ est aussi un processus d'Itô avec pour tout $1 \leq k \leq q$,*

$$dY_t^{(k)} = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)(dX_t^{(i)}).(dX_t^{(j)}) \tag{3.7}$$

avec la règle de multiplication

$$dt.dt = dt.dB_t^{(i)} = 0, dB_t^{(i)}.dB_t^{(j)} = \delta_i^j dt,$$

δ_i^j est le symbole de Kronecker $\delta_i^j = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

3.3 Intégration par partie

DÉFINITION **29** *Le crochet : Le crochet d'une martingale de carré intégrable continue M est l'unique processus croissant $< M >$ tel que $M_t^2 - < M >_t$ soit une martingale.*
Si X et Y sont deux martingales continues leur crochet $< X, Y >$ est l'unique processus à variation bornée tel que $X_t Y_t - < X, Y >_t$ soit une martingale.

Soient (X_t) et (Y_t) deux processus d'Itô. Alors pour tout $t \geq 0$, on a

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t . \tag{3.8}$$

qu'on écrit encore sous forme différentielle

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d < X, Y >_t .$$

3.4 Exercices

Exercice 1 Posons

$$X_t = \int_0^t (\cos s) dB_s.$$

1. Montrer que X_t existe.
2. Montrer que $E(X_sX_t) = \frac{\min(s,t)}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\min(s,t))$.
3. Calculer $E[X_t|\mathcal{F}_s)$ pour $s \leq t$.
4. Montrer que $X_t = (\cos t)B_t + \int_0^t (\sin s) B_s ds$.

Exercice 2 Montrer que si f est une fonction déterministe de carré intégrable

$$E\left(B_t \int_0^t f(s) dB_s\right) = \int_0^t f(s) ds.$$

Exercice 3 Soit $t_1 < t_2$. Calculer $E\left(\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt\right)$. Montrer que

$$\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t) dB_t.$$

Calculer $Var\left(\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt\right)$.

Exercice 4 Montrer que les processus suivants sont des processus d'Itô
1. $X_t = B_t^2$,
2. $X_t = te^{B_t}$,
3. $X_t = B_t^4 - 4tB_t$.

Exercice 5 On considère le processus

$$dX_t = \frac{X_t}{t-1} dt + dB_t ; 0 \leq t < 1, X_0 = 0.$$

1. Montrer que

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, 0 \leq t < 1.$$

2. Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.

Exercice 6 Soit $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ et $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$. Calculer $dZ_t, E(Z_t)$ et $var(Z_t)$

Exercice 7 Soient $f \in \mathbf{A}(0,t)$ et

$$X_t = \int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds.$$

Posons $Y_t = e^{X_t}$ et $Z_t = e^{-X_t}$.

1.Calculer dY_t et dZ_t.

2. En supposant que $f(t) = f$ une constante déterministe montrer que $E(Y_t) = 1$.

Exercice 8 Soit

$$Z_t = e^{(\alpha-\gamma^2/2)t+\gamma B_t}\left(\delta + \beta\int_0^t e^{-(\alpha-\gamma^2/2)s-\gamma B_s}ds\right),$$

α, β, γ et δ sont des constantes. Calculer dZ_t.

Exercice 9 Soit $Y_t = tX_t^{(1)}X_t^{(2)}$ avec

$$\begin{aligned} dX_t^{(1)} &= f_1(t)dt + \sigma_1(t)dB_t \\ dX_t^{(2)} &= \sigma_2(t)dB_t \end{aligned}$$

Calculer dY_t.

Exercice 10 Soient $B_t^{(1)}$ et $B_t^{(2)}$ deux mouvements Browniens standards et indépendants. Posons $V_t = \left(B_t^{(1)}\right)^2 + \left(B_t^{(2)}\right)^2$, calculer dV_t.

Montrer que l'on peut écrire $W_t = \sqrt{V_t}$ sous la forme

$$dW_t = \frac{B_t^{(1)}dB_t^{(1)} + B_t^{(2)}dB_t^{(2)}}{2W_t}.$$

Exercice 11 Soient les deux processus $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ définis par

$$dX_t^{(i)} = X_t^{(i)}\left(\mu dt + \sigma_i dB_t^{(i)}\right), i = 1, 2,$$

où $B_t^{(1)}$ et $B_t^{(2)}$ deux mouvements Browniens standards et indépendants, μ et σ_i sont supposées déterministes.

Posons $Y_t = (X_t^{(1)} + X_t^{(2)})/2$ et $Z_t = \sqrt{X_t^{(1)} X_t^{(2)}}$. Calculer dY_t.
Montrer que

$$dZ_t = Z_t \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} \right) dt + \frac{\sigma_1}{2} dB_t^{(1)} + \frac{\sigma_2}{2} dB_t^{(2)} \right\}.$$

Chapitre 4

Equations différentielles stochastiques

DÉFINITION **30** *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \Sigma(s, X_s)dB_s, \tag{4.1}$$

ou sous forme simplifiée

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \Sigma(t, X_t)dB_t, X_0 = x; \tag{4.2}$$

μ et B sont des vecteurs de dimension n et m respectivement, Σ une matrice.

THÉORÈME **14** *On suppose qu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*
1. Pour tour $t \in [0, T]$, on a

$$||\mu(t, x)||^2 + ||\Sigma(t, x)||^2 \leq C_1 \left(1 + ||x)||^2\right).$$

2. les deux fonctions $\mu(t, .)$ et $\Sigma(t, .)$ sont lipschitziennes

$$||\mu(t, x) - \mu(t, x)|| + ||\Sigma(t, x) - \Sigma(t, y)|| \leq C_2 \, ||x - y|| \, .$$

Soit Z un v.a indépendant de B_t et de carré intégrable, alors l'équation différentielle

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \Sigma(t, X_t)dB_t, X_0 = Z$$

admet une solution unique X_t qui est $\sigma(Z) \vee \mathcal{F}_t$-mesurable, ayant des trajectoires continues et telle que

$$E\left(\int_0^T ||X_s||^2 \, ds\right) < \infty.$$

4.0.1 Equations différentielles homogènes

On suppose que $dim(X_t) = m = 1, \mu(t,x) = \mu(x), \sigma(t,x) = \sigma(x)$.

THÉORÈME **15** *Soient $(B_t, t \in \mathbb{R}^+)$ un mouvement Brownien standard de filtration naturelle $(\mathcal{F}_t, \in \mathbb{R}^+)$, $x \in \mathbb{R}$ et μ et σ sont lipschitziennes. Alors il existe un unique processus $(X_t, \in \mathbb{R}^+)$ continu et adapté à $(\mathcal{F}_t, \in \mathbb{R}^+)$ tel que*

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \ \ p.s \tag{4.3}$$

ou encore

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, X_0 = x. \tag{4.4}$$

De plus,

$$E(sup_{0\leq t\leq T}X_t^2) < \infty \ pour \ tout \ T > 0.$$

Remarque - La solution (X_t) donnée par (4.3) ci-dessus est appelée une solution forte de l'équation (4.4) car le mouvement Brownien est fixé à l'avance et on cherche la solution dans l'espace filtré $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

4.0.2 Solution faible

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. On considère l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, X_0 = x_0. \tag{4.5}$$

DÉFINITION **31** *Une solution faible de l'équation (4.4) est un processus continu (X_t) tel que les processus (M_t) et (N_t) définis par*

$$M_t = X_t - X_0 - \int_0^t \mu(X_s)ds \ \ et \ N_t = M_t^2 - \int_0^t \sigma(X_s)^2 ds$$

soient des martingales.

Le mouvement brownien standard (B_t) ne figure plus dans la solution faible. Ainsi, une solution faible d'une équation différentielle stochastique est une solution en loi.

Théorème **16** *Supposons μ, σ continues, g bornée et supposons que l'équation (4.5) admette une solution forte (X_t). Alors (X_t) est une solution faible de (4.5).*

Remarque. Une équation différentielle stochastique peut admettre une solution faible, mais pas de solution forte ; il existe donc plus souvent une solution faible qu'une solution forte.
Exemple. La solution faible de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = sgn(X_t)dB_t, \;\; X_0 = 0 \tag{4.6}$$

(où $sgn(x)$ est la fonction signe c'est à dire que $sgn(x) = 1$ si $x \geq 0$ et -1 sinon) est un processus continu (X_t) tel que X_t et $(X_t^2 - \int_0^t 1ds = X_t^2 - t$ sont des martingales. Ainsi la solution faible de l'équation ci-dessus est donc un mouvement Brownien standard B'_t différent du mouvement Brownien standard (B_t) (car B_t ne peut pas être une solution de (4.6)).

4.0.3 Propriété de Markov

On note $(X_t^{s,x}, t \geq)$ la solution de (4.5) partant de x à l'instant s, soit

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t \mu(u, X_u^{s,x})du + \int_s^t \Sigma(u, X_u^{s,x})dB_u.$$

Sous les conditions du théorème 14 on peut montrer que

$$X_t^{0,x} = X_t^{s, X_s^{0,x}},$$

ce qui montre que la solution de (4.5) est un processus de Markov par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$:

$$E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) \mid X_s) = g(t, s, X_s),$$

où $g(t, s, x) = E(f(X_t^{s,x})), t \geq s.$
En particulier si

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t \mu(X_u^{s,x})du + \int_s^t \Sigma(X_u^{s,x})dB_u$$

on obtient un processus de Markov homogène et on a

$$E(f(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) \mid X_s) = g(t, s, X_s) = h(t - s, X_s),$$

avec $g(t, s, x) = E(f(X_t^{s,x})) = E(f(X_{t-s}^{0,x}))$ et $h(u, x) = E(f(X_u^{0,x})), \;\; t \geq s.$

4.0.4 Théorème de Girsanov

THÉORÈME **17** *Soit $(B_t; t \geq 0)$ un mouvement Brownien sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}; P)$ et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. Soit*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right),\ t \leq T.$$

On suppose que L_t est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ sous la probabilité P.
Soit la mesure Q sur la tribu $\mathcal{F}_T$

$$dQ(\omega) = L_T(\omega) dP(\omega).$$

Alors Q est une probabilité sur $\mathcal{F}_T$ et $B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \mu_s ds$ où $\tilde{B}_t$ est un mouvement Brownien sous la probabilité Q.

Q est la transformée de Girsanov de P.
Remarques.1. Sous la condition de Novikov $E_P\left(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \mu_s^2 ds\right) < 1$, L_T est une variable positive d'espérance 1 sous P et L est une P-martingale.
Si L n'est pas d'espérance 1, L est une surmartingale d'espérance strictement plus petite que 1.
2. Pour une application du théorème de Girsanov en finance voir A. Conze (2012).

4.1 Quelques équations du monde de la finance

4.1.1 Modèle de Black & Scholes

DÉFINITION **32** *Un mouvement Brownien géométrique est donné par*

$$X_t = exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\right), \tag{4.7}$$

μ et σ des constantes, B_t est un mouvement Brownien standard.

En appliquant la fomule d'Itô à la fonction $f(t,x) = exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma x\right)$, on obtient

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,\ \ X_0 = 1; \tag{4.8}$$

c'est l'équation de Black Scholes où X_t est le prix de l'action, μ le taux de rendement et σ la volatilité de l'action.

4.1.2 Modèle de Vasicek

Le taux d'intérêt court instantané r_t (voir Vasicek (1977)) suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants :

$$dr_t = a[b - r_t]dt + \sigma dB_t, r_0 = x$$

avec a, b, σ et x des constantes positives ; la solution est donnée par

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s.$$

Démonstration. On applique la formule d'Itô à $f(t, x) = xe^{at}$.

4.1.3 Modèle CIR

Le modèle (CIR) a été proposé par Cox, Ingersoll Ross (1985) pour modéliser le taux court instantané r_t, ils supposent que celui-ci est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = a[b - r_t]dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t, r_0 = x,$$

avec la condition

$$\sigma^2 < 2ab.$$

Remarque. Aucune solution explicite n'est connue pour cette équation, mais on peut montrer que r_t suit une loi de Khi-deux décentrée.

4.2 Exercices

Exercice 1 Soit B_t un mouvement Brownien. Posons $Y_t = B_t^k$.
1. Montrer que Y_t vérifie l'équation différentielle suivante

$$dY_t = (k-1)B_t^{k-1} dB_t + \frac{1}{2} k(k-1) B_t^{k-2} dt.$$

2.Posons $m_k(t) = E(B_t^k)$, montrer que

$$m_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t m_{k-2}(s) ds,$$

calculer $m_k(t)$ pour $k = 2, 4, 6$.

Exercice 2 Soit l'équation différentielle

$$dX_t = \mu X_t dt + dB_t, X_0 = x.$$

1. Posons $Y_t = e^{-\mu t} X_t$, écrire l'équation différentielle associée à Y_t.
2. Montrer que la solution de cette dernière est donnée par

$$Y_t = y + \int_0^t e^{-\mu s} dB_s, y = x.$$

3. Calculer $E(Y_t), E(Y_t^2)$.

Exercice 3 (Mouvement Brownien géométrique)
1. Montrer que la solution Y_t de l'équation

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, Y_0 = 1,$$

est donnée par

$$X_t = \exp\left((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\right).$$

2. Montrer que si $\mu \geq 0$ alors X_t est une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Exercice 4 Soit l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = (\mu_1 + \mu_2 X_t)dt + (\sigma_1 + \sigma_2 X_t)dB_t, X_0 = x, t \in [0, T]. \tag{4.9}$$

1. Montrer que (4.9) admet une unique solution.
2. Soit $m_k(t) = E(X_t^k)$ le moment d'ordre k de X_t.
Montrer que $m_1(t)$ est solution de l'équation différentielle déterministe

$$\frac{dy(t)}{dt} - \mu_2 y(t) = \mu_1, y(0) = x. \tag{4.10}$$

3. Ecrire l'équation différentielle stochastique associée à $Y_t = X_t^2$; en déduire que $m_2(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy(t)}{dt} - (2\mu_1 + \sigma_2^2)y(t) = 2(\mu_1 + \sigma_1\sigma_2)m_1(t) + \sigma_1^2, y(0) = x^2. \tag{4.11}$$

2. Résoudre les deux équations (4.10) et (4.11).
Exercice 5 (Modèle de Black et Scholes avec effet hétéroscédastique). Soit l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t) S_t dB_t, S_0 = x,$$

On suppose que la volatilité σ est une fonction déterministe.
1. Montrer que

$$S_t = x \exp\left(\mu t + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right).$$

2. Calculer $E(S_t)$.
Exercice 6 (Modèle Cox, Ingersoll Ross (1985) pour le taux court instantané r_t). On suppose que r_t est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = a[b - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t} dB_t, r_0 = x,$$

avec la condition

$$\sigma^2 < 2ab.$$

Calculer $E(r_t)$ et $var(r_t)$.
Exercice 7 On suppose que le processus (X_t) est à valeurs dans $]0,1[$ et solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = -\sigma^2 X_t^2 (1 - X_t) dt + \sigma X_t (1 - X_t) dB_t, X_0 = x.$$

Montrer que

$$X_t = \frac{x \exp\left(\sigma B_t - \sigma^2 t/2\right)}{x \exp\left(\sigma B_t - \sigma^2 t/2\right) + 1 - x}.$$

Exercice 8 (Girsanov) Soit μ une fonction déterministe et L_t le processus solution de l'équation

$$dL_t = -L_t \mu_t dB_t, L_0 = 1.$$

1.Montrer que

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right), \ t \leq T.$$

2.Montrer que L_t est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$ sous la probabilité P.
Soit la mesure Q sur la tribu $\mathcal{F}_T$

$$dQ(\omega) = L_T(\omega)dP(\omega).$$

3. En déduire que Q est une probabilité sur $\mathcal{F}_T$ et $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \mu_s ds$ est un mouvement Brownien sous la probabilité Q.
4.Montrer que

$$E_P(L_T \log L_T) = \frac{1}{2}\int_0^T \mu_s^2 ds.$$