PROCESSUS STOCHASTIQUES

M. BOUTAHAR

Definition 1

Une suite $\{X_n, n \geq 0\}$ à valeurs dans un espace d'états S est dite une chaîne de Markov discrète (CMD) si $\forall i, j \in S$, et $\forall (i_0, ..., i_{n-1}) \in S$

$$\begin{aligned} & P(X_{n+1} = j \,| X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\,) \\ = \; & P(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i). \end{aligned}$$

Definition 2

Une CMD est stationnaire (ou homogène dans le temps) si $\forall i, j \in S, \forall n$

$$P(X_{n+1} = j \,| X_n = i\,) = P(X_1 = j \,|\, X_0 = i).$$

Pour une CMD on associe la matrice des probabilités de transition $\mathcal{P} = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$, où $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j \,|X_n = i\,)$

Theorem 3

Si $\{X_n, n \geq 0\}$ *est une CMD, alors*
i)$p_{i,j} \geq 0$,
ii)$\forall i \in S$, $\sum_{j\in S} p_{i,j} = 1$.

Preuve.

$$\begin{aligned}\sum_{j\in S} p_{i,j} &= \sum_{j\in S} P(X_{n+1} = j \,|X_n = i\,) \\ &= P(X_{n+1} \in S \,|X_n = i\,) = P(X_{n+1} \in S) = 1.\end{aligned}$$

Theorem 4

Soit $\mathcal{P}$ une matrice de transition. Alors
i) $\mathcal{P}$ admet la valeur propre 1
ii) $V = {}^t(1, 1, ...)$ est le vecteur propre associé à 1.

Preuve.

$$PV = V \Longleftrightarrow \sum_{j \in S} p_{i,j} v_j = v_i$$

Il suffit de prendre $v_i = 1$.

Exemples. 1. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$.

On pose $X_0 = 0$, et

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + 1 & \text{avec probabilité } p \text{ ,} \\ \\ X_{n-1} - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p \end{cases}$$

X_n est une chaîne de Markov.

Exemples. 2. Modèle d'Ehrenfest

On place N boules numérotées de 1 à N dans deux urnes U_1 et U_2. On effectue l'expérience suivante: On choisit un nombre au hasard entre 1 et N avec une probabilité $1/N$.

Si ce nombre est i on change d'urne la boule numérotée i.

On note X_n le nombre de boules dans l'urne U_1 après n expériences.

Si $X_0 = N$ alors X_n décrit la diffusion d'un gaz de U_1 à U_2.

X_n est une chaîne de Markov.

Posons

$$p_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j \,|X_0 = i\,), \text{probabilité de transition d'horizon } n$$

$$\mathcal{P}^{(n)} = (p_{i,j}^{(n)}, (i,j) \in S^2).$$

Theorem 5

(Chapman-Kolmogorov). La matrice de transition en n étapes est égale à la puissance nième de la matrice de transition en une étape.

$$\mathcal{P}^{(n)} = (\mathcal{P})^n.$$

Nous allons utiliser l'égalité suivante, valable pour toute partition $(C_i)_{i\in S}$ de Ω.

$$P(A \mid B) = \sum_{i\in S} P(A \mid B \cap C_i)P(C_i \mid B), \qquad (1)$$

en effet

$$\begin{aligned}
P(A \mid B) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B \cap \cup_{i\in S} C_i)}{P(B)} \\
&= \frac{P(\cup_{i\in S} A\cap B\cap C_i)}{P(B)} = \frac{\sum_{i\in S} P(A\cap B\cap C_i)}{P(B)} \\
&= \sum_{i\in S} \frac{P(A\cap B\cap C_i)}{P(B\cap C_i)} \times \frac{P(B\cap C_i)}{P(B)}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}^{(n)} &= P(X_n = j \,|X_0 = i\,) \\
&= \sum_{k=1}^{N} P(X_n = j\,|X_{n-1} = k, X_0 = i\,)P(X_{n-1} = k\,|X_0 = i\,) \\
&= \sum_{k\in S} P(X_n = j\,|X_{n-1} = k, X_0 = i\,)p_{i,k}^{(n-1)} \\
&= \sum_{k\in S} P(X_n = j\,|X_{n-1} = k\,)p_{i,k}^{(n-1)}, \ \text{(propriété de Markov)} \\
&= \sum_{k\in S} P(X_1 = j\,|X_0 = k\,)p_{i,k}^{(n-1)} \ \text{(stationnarité)} \\
&= \sum_{k\in S} \ p_{i,k}^{(n-1)} p_{k,j} \Longrightarrow \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}^{(n-1)}P.
\end{aligned}
$$

Theorem 6

(Equations de Chapman-Kolmogorov)

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} p_{k,j}^{(m)}.$$

Preuve: $\mathcal{P}^{(n+m)} = \mathcal{P}^{(n)}\mathcal{P}^{(m)}.\square$

Soit μ une mesure de probabilité sur S et X_n une chaîne de Markov.

Definition 7

On dit que P^μ est la mesure de probabilité de X_n si:
i. $P^\mu(X_0 = i) = \mu_i$ (μ est la loi initiale de la chaine).
ii. $P^\mu(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{i,j}$.

Definition 8

On dit que $\mathcal{F}$ est une **algèbre** sur Ω si les conditions suivantes sont satisfaites:
i. $\emptyset$ et Ω sont dans $\mathcal{F}$,
ii. si A est dans $\mathcal{F}$, alors A^c est dans $\mathcal{F}$, où A^c est le complémentaire de A dans Ω.
iii. si A et B sont dans $\mathcal{F}$, alors $A \bigcup B$ est dans $\mathcal{F}$.

Exemple. $\Omega = \{1, 2, 3\}$,
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
est une algèbre.

Definition 9

On dit que $\mathcal{F}$ est une **tribu** (ou σ-**algèbre**) sur Ω si les conditions de la définition précédente sont satisfaites avec iii) remplacée par:
iii'. si $(A_n, n \geq 1)$ est dans $\mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ est dans $\mathcal{F}$.

Tribu engendrée par des variable aléatoires.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$. Alors

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(C) : C \in \mathcal{E}\},$$

où $X^{-1}(C) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in C\}$, est une sous-tribu de $\mathcal{F}$. C'est la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ par rapport à laquelle X soit mesurable.

Si $X_0, ..., X_n$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, alors

$$\sigma(X_0, ..., X_n) = \{(X_0, ..., X_n)^{-1}(C) : C \in \mathcal{E}^{n+1}\},$$

où $(X_0, ..., X_n)^{-1}(C) := \{\omega \in \Omega : (X_0(\omega), ..., X_n(\omega)) \in C\}$, est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Theorem 10

Pour tout $A \in \sigma(X_0, ..., X_n)$ *tel que* $P(A \cap \{X_n = i\}) > 0$, *on a*

$$P(X_{n+1} = j \mid A \cap \{X_n = i\}) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{i,j}$$

Preuve. Utilisation de la propriété de Markov.

Definition 11

On dit que l'état j est **accessible** à partir de l'état i, que l'on note $i \rightsquigarrow j$ s'il existe un entier n tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Proposition 12

Les deux propriétés sont équivalentes:
a. $i \rightsquigarrow j$
b. X_n *partant de* i, *passe par* j *avec une probabilité strictement positive.*

Preuve. $a \Longrightarrow b$. Montrons que *non* $a \Longrightarrow$ *non* b .

Sous *non* a, pour tout $n \geq 0$, on a $p_{i,j}^{(n)} = 0$.

Soit A l'événement "la chaîne passe par j". Alors

$$\begin{aligned} P(A \mid X_0 = i) &= P(\cup_{n\geq 0}\{X_n = j\} \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{n\geq 0} P(X_n = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{n\geq 0} p_{i,j}^{(n)} \\ &= 0. \square \end{aligned}$$

Definition 13

On dit que deux états i et j **communiquent**, que l'on note $i \leftrightsquigarrow j$ si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$.

Proposition 14

La relation $\leftrightsquigarrow$ est une relation d'équivalence.

Preuve. La relation est symétrique par construction.

Il suffit de montrer la réflexivité et la transitivité pour $\rightsquigarrow$.

- Réflexive: $p_{i,i}^{(0)} = 1$ donc $i \rightsquigarrow i$,
- Transitive: Si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow k$, alors il existe (m,n) tels que $p_{i,j}^{(m)} > 0$ et $p_{j,k}^{(n)} > 0$. Or $p_{i,k}^{(m+n)} = \sum_{l \in S} p_{i,l}^{(m)} p_{l,k}^{(n)} \geq p_{i,j}^{(m)} p_{j,k}^{(n)} > 0.\square$

Les classes d'équivalence de $\leftrightsquigarrow$ disjointes et non vides sont dites classes **indécomposables**.

Definition 15

Si tous les états communiquent entre eux, $\leftrightsquigarrow$ admet une seule classe d'équivalence; dans ce cas la chaine est dite **irréductible**

Exemples 1.

$$S = \{1,2,3,4\} \text{ avec } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La chaîne contient trois classes

2.

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \text{ avec } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Tous les états communiquent entre eux, la chaîne est irréductible.

Temps d'arrêt

Dans un jeu de hasard, un temps d'arrêt est un temps lors duquel le joueur décide d'arrêter de jouer, selon un critère ne dépendant que du passé et du présent. Il peut par exemple décider d'arrêter de jouer dès qu'il a gagné une certaine somme.

Definition 16

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus stochastique et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ la filtration naturelle. Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est un temps d'arrêt si

$$\forall n \geq 0, \ \ \{\omega : T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Definition 17

Le temps d'atteinte de la chaîne X_n dans l'état j à partir de l'instant 1 est définit par

$$T_j = \inf\{k \geq 1 : X_k = j\}.$$

Definition 18

La probabilité pour que X_n, partant de l'état i, atteigne l'état j pour la première fois, à l'instant n est définie par

$$f_{i,j}^{(n)} = P(T_j = n \mid X_0 = i).$$

Theorem 19

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)}.$$

Preuve

$$X_n = j \Longleftrightarrow T_j \leq n \Longrightarrow \cup_{k=1}^{n} \{T_j = k\} = \Omega.$$

$$P(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} P(T_j = k, X_n = j \mid X_0 = i).$$

Or $\{T_j = n\} \subset \{X_n = j\}$, donc

$$
\begin{aligned}
P(X_n = j \mid X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(T_j = k, X_n = j \mid X_0 = i) \\
&+ P(T_j = n \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(T_j = k, X_n = j \mid X_0 = i) \\
&+ f_{i,j}^{(n)}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X_n = j \mid X_0 = i) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(T_j = k \mid X_0 = i) \\
& P(X_n = j \mid T_j = k, X_0 = i) + f_{i,j}^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Pour tout $1 \leq k \leq n-1$,

$$\{T_j = k, X_0 = i\} = \{A, X_k = j\} \text{ avec } A \in \sigma(X_0, ..., X_{k-1}).$$

D'où

$$P(X_n = j \mid T_j = k, X_0 = i) = P(X_n = j \mid X_k = j) = p_{j,j}^{(n-k)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n-1} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)} + f_{i,j}^{(n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)}. \ \square \end{aligned}$$

Posons

$$f_{i,j} = P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} f_{i,j}^{(n)},$$

la probabilité pour que la chaîne, partant de i, passe par j au moins une fois au cours du temps.

Definition 20

On dit que l'état j est **récurrent** si $f_{j,j} = 1$.
On dit qu'il **transient** si $f_{j,j} < 1$

Récurrent : Si la chaîne part de j, elle y retourne presque sûrement au moins une fois au cours du temps.

Theorem 21

Un état j est récurrent ou transient selon que

$$\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} = +\infty,$$

ou

$$\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} < +\infty.$$

Lemma 22

(Abel) i. Si la série de terme général u_n et a pour somme $\overline{u}$, alors $\lim_{s\to 1^-} \sum_{n\geq 0} u_n s^n = \overline{u}$.
ii. Si u_n est positive et si $\lim_{s\to 1^-} \sum_{n\geq 0} u_n s^n = \overline{u}$, alors la série de terme général u_n converge vers $\overline{u}$,

Posons

$$P_{i,j}(s)=\sum_{n\geq 0}p_{i,j}^{(n)}s^n \quad F_{i,j}(s)=\sum_{n\geq 0}f_{i,j}^{(n)}s^n.$$

$$\begin{aligned}
P_{j,j}(s) &= 1+\sum_{n\geq 1}p_{j,j}^{(n)}s^n,\\
&= 1+\sum_{n\geq 1}s^n\left(\sum_{k=0}^{n}f_{j,j}^{(k)}p_{j,j}^{(n-k)}\right) \ (\textit{theoreme}\ 19)\\
&= 1+\sum_{n\geq 0}s^n\left(\sum_{k=0}^{n}f_{j,j}^{(k)}p_{j,j}^{(n-k)}\right)\\
&= 1+F_{j,j}(s)P_{j,j}(s)
\end{aligned}$$

On déduit la proposition suivante:

Proposition 23

$$P_{j,j}(s) = \frac{1}{1 - F_{j,j}(s)}, \; P_{i,j}(s) = F_{i,j}(s)P_{j,j}(s) \; (i \neq j). \tag{2}$$

ou encore

$$P_{i,j}(s) = \delta_i^j + F_{i,j}(s)P_{j,j}(s) \tag{3}$$

Preuve du théorème 21. Suppsons j récurrent, soit $\sum_{n\geq 0} f_{j,j}^{(n)} = 1$. D'après i. du lemme

$$\lim_{s\to 1^-} \sum_{n\geq 0} f_{j,j}^{(n)} s^n = 1,$$

D'après (2) on a

$$\lim_{s\to 1^-} P_{j,j}(s) = +\infty = \lim_{s\to 1^-} \sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} s^n = +\infty.$$

On applique alors ii. du lemme pour déduire que $\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} = +\infty$.
Si j est transient, soit $\sum_{n\geq 0} f_{j,j}^{(n)} < 1$, d'une manière similaire on a

$$\lim_{s\to 1^-} P_{j,j}(s) < +\infty,$$

et par le lemme on obtient $\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} < +\infty$.

Proposition 24

Tout état j de non retour, i.e. $p_{j,j}^{(n)} = 0$ pour $n \geq 1$, est transient.
Tout état j absorbant , i.e. $p_{j,j}^{(n)} = 1$ pour $n \geq 0$, est récurrent.

Preuve.

$$j \text{ état de non retour} \Longrightarrow \sum_{n \geq 0} p_{j,j}^{(n)} = p_{j,j}^{(0)} = 1.$$

$$j \text{ état absorbant} \Longrightarrow \sum_{n \geq 0} p_{j,j}^{(n)} = +\infty.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 21. □

Proposition 25

Si i est récurrent et si $i \leftrightsquigarrow j$ alors j est récurrent.

Preuve.

$$i \leftrightsquigarrow j \Longrightarrow \exists (n_1, n_2)\, p_{i,j}^{(n_1)} > 0 et p_{j,i}^{(n_2)} > 0,$$

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n_1+n+n_2)} &\geq \sum_{n\geq 0} p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(n_1)} \\ &= p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,j}^{(n_1)} \sum_{n\geq 0} p_{i,i}^{(n)} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Proposition 26

Soit j un état transient. Alors, pour tout i, on a

$$\sum_{n\geq 0} p_{i,j}^{(n)} = \delta_i^j + f_{i,j} \sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)}; \tag{4}$$

$$\sum_{n\geq 0} p_{j,j}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{j,j}}, \ \sum_{n\geq 1} p_{i,j}^{(n)} = \frac{f_{i,j}}{1-f_{j,j}} \ (i \neq j). \tag{5}$$

En particulier la série de terme général $p_{i,j}^{(n)}$ est convergente et $p_{i,j}^{(n)} \to 0$ si $n \to \infty$.

Preuve. L'égalité (4) découle de l'égalité (3), appliquée pour $s \to 1^-$ et du théorème 21.

Puisque la série de terme général $p_{j,j}^{(n)}$ converge vers $\beta = \sum_{n \geq 0} p_{j,j}^{(n)}$, on a $\lim_{s \to 1^-} P_{j,j}(s) = \beta$, par le lemme d'Abel.

L'égalité (5) découle directement de (4). $\square$

Proposition 27

Si une chaîne a un nombre fini d'états, elle a au moins un état récurrent.

Preuve. Soit N le nombre d'états de la chaîne. Pour tout entier $n \geq 0$, on a $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} = N$, donc $\sum_{n\geq 0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{i,j}^{(n)} = +\infty$, ou encore

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n\geq 0} p_{i,j}^{(n)} = +\infty. \tag{6}$$

Si tous les états sont transients alors

$$\forall (i,j) \in S^2, \sum_{n \geq 0} p_{i,j}^{(n)} < \infty$$

d'après (5), et donc

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n \geq 0} p_{i,j}^{(n)} < +\infty,$$

ceci est en contradiction avec (6). $\square$

Theorem 28

Conditionnellement à $\{T_j < \infty\}$, la suite (X_{T_j+n}) est une chaîne de Markov d'état initiale j.

Preuve.Il suffit d'utiliser la propriété d'homogéinité. □

$$N_j = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{X_n = j\}} = \text{nombre de retours dans l'état } j \text{ après l'instant } 0$$

.

Theorem 29

Pour une chaîne, il n'a que deux sortes d'états : les états récurrents et les états transients. Soient j un état transient et $a = f_{j,j} = P(T_j < \infty \mid X_0 = j)$. Alors $a < 1$ et N_j, conditionnellement à $X_0 = j$, suit la loi géométrique :

$$P(N_j = k \mid X_0 = j) = (1 - a)a^k. \tag{7}$$

Preuve. Voir Exercice 4.

Proposition 30

Soit j un état récurrent et $k \neq j$ tel que $j \rightsquigarrow k$, alors $k \rightsquigarrow j$, de sorte que k est aussi récurrent et dans la même classe que j. En particulier une chaîne ne peut aller d'un état récurrent vers un état transient.

Preuve. Supposons que pour $n \geq 1$, on ait $p_{j,k}^{(n)} > 0$ et montrons qu'il existe $m \geq 0$ tel que $p_{k,j}^{(m)} > 0$.
On suppose que $n = 1$, soit $p_{j,k} > 0$.
Supposons que $P(X_m = j \mid X_0 = k) = p_{k,j}^{(m)} = 0$ pout tout $m \geq 1$. Alors $P(N_j = \infty \mid X_0 = k) \leq \sum_{m \geq 0} p_{k,j}^{(m)} = 0$, car $\{N_j = \infty\} \subset \cup_{m \geq 0}\{X_m = j\}$.

Donc

$$\begin{aligned} P(N_j = \infty \mid X_0 = j) &= \sum_{l \geq 0} p_{j,l} P(N_j = \infty \mid X_0 = j, X_1 = l) \\ &= \sum_{l \neq k} p_{j,l} P(N_j = \infty \mid X_0 = l) \\ &\leq \sum_{l \neq k} p_{j,l} = 1 - p_{j,k} < 1 \end{aligned}$$

et donc j n'est pas récurrent, ce qui contredit l'hypothèse de la proposition.

Donc $k \rightsquigarrow j$, donc k est récurrent d'après la proposition 25. $\square$

Definition 31

Un état j est dit état de retour s'il existe $n \geq 1$ tel que $p_{j,j}^{(n)} > 0$.

Definition 32

Soit j un état de retour. On appelle période de j, noté $d(j)$, le p.g.c.d. de tous les entiers $n \geq 1$ pour lesquels $p_{j,j}^{(n)} > 0$.

- Si $d(j) = d \geq 2$, on dit que j est périodique de période d.
- Si $d(j) = d = 1$, on dit que j est apériodique.
- Si j est un état de non retour, on pose $d(j) = +\infty$.

Theorem 33

Si i est périodique de période d finie et si $i \leftrightsquigarrow j$, $i \neq j$. Alors j est périodique de période d.

$$i \leftrightsquigarrow j \Longrightarrow \exists (n, m)\, p_{i,j}^{(n)} > 0 \text{ et } p_{j,i}^{(m)} > 0,$$

Comme i est de période $d(i) = d$, on a $p_{i,i}^{(d)} > 0$.
On a donc $p_{j,j}^{(n+d+m)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(d)} p_{i,j}^{(n)} > 0$.
Comme $p_{i,i}^{(d)} > 0 \Longrightarrow p_{i,i}^{(2d)} > 0$, on a aussi $p_{j,j}^{(n+2d+m)} > 0$.
La période $d(j)$ de j divise donc à la fois $n + d + m$ et $n + 2d + m$, donc divise d.

Soit $d_1 = d(j)$ la période de j, on a $p_{j,j}^{(d_1)} > 0$, et de la même manière que ci-dessus on montre que $d(i)$ divise d_1 et par conséquent $d(i) = d(j)$.$\square$

Exemples. 1. Promenade dans $\mathbb{Z}$: tous les états sont périodiques de période 2.

2.

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \text{ avec } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous les états communiquent. Il y a une seule classe récurrente. A partir de 1, deux chemins possibles: $1 \to 3 \to 2 \to 1$, ou $1 \to 4 \to 2 \to 1$, l'état 1 est donc périodique de période 3. Les autres états sont aussi périodiques vu que la chaîne est irréductible.

Definition 34

Un ensemble C d'états est dit clos (ou fermé) , si pour tout $i \in C$, et tout $j \notin C$, on a $p_{i,j} = 0$.

Proposition 35

Si C est un ensemble clos, alors si $j \notin C$, j n'est pas accessible à partir d'un état $i \in C$, i.e. $p_{i,j}^{(n)}$, pour tout $n \geq 1$. En particulier

$$\forall i \in C, \sum_{k \in C} p_{i,k} = 1.$$

Preuve. Soit $i \in C$ et $j \notin C$. Pour $n = 1$, $p_{i,j}^{(1)} = p_{i,j} = 0$ par définition. Supposons que $p_{i,j}^{(n)} = 0$ et montrons que $p_{i,j}^{(n+1)} = 0$.

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{k \in C} p_{i,k} p_{k,j}^{(n)} + \sum_{k \notin C} p_{i,k} p_{k,j}^{(n)}.$$

Dans la première somme $p_{k,j}^{(n)} = 0$ par récurrence; dans la seconde somme $p_{i,k} = 0$ par définition, et donc $p_{i,j}^{(n+1)} = 0$. On a aussi

$$\forall i \in C, \sum_{l \in C} p_{i,l}^{(n)} = 1.$$

Proposition 36

Tout ensemble clos est une réunion de classes indécomposables: deux ensembles clos différents ne communiquent pas entre eux.

Preuve. Soit C clos et $i \in C$. D'après la proposition 35, s'il existe $n \geq 1$ et un état j tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$, alors $j \in C$. Donc C contient tous les états j tels que $i \rightsquigarrow j$, et par suite toute la classe indécomposable à laquelle appartient i. $\square$

Proposition 37

Toute classe récurrente est close.

Preuve. D'après la proposition 30, si i est récurrent et $j \neq i$ tel que $i \rightsquigarrow j$, alors $j \rightsquigarrow i$. Soit C la classe récurrente qui contient i et $j \notin C$. Si l'on avait $p_{i,j} > 0$, on aurait $i \rightsquigarrow j$, et donc $j \rightsquigarrow i$, donc j est récurrente, donc $j \in C$, ce qui est impossible.

Definition 38

Le temps d'atteinte moyen dans j à partir de i est définit par

$$M_{i,j} = E(T_j \mid X_0 = i).$$

c'est l'espérance conditionnelle de T_j sachant que $X_0 = i$.

- $f_{i,j} = \sum_{n\geq 1} f_{i,j}^{(n)} < 1$ (on n'est pas sûr d'atteindre j) $\Longrightarrow M_{i,j} = +\infty$.
- $$f_{i,j} = 1 \Longrightarrow M_{i,j} = \sum_{n\geq 1} n f_{i,j}^{(n)}. \tag{8}$$

Definition 39

On dit que l'état i est positif si $M_{i,i} < \infty$ et nul si $M_{i,i} = +\infty$.

Theorem 40

(Critère de positivité). Soit i un état;

$$\limsup_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} > 0 \Longrightarrow \text{ l'état } i \text{ est positif,}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0 \Longrightarrow \text{ l'état } i \text{ est nul.}$$

- Si i est transient alors d'après le théorème 21 $\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0$, donc i est nul.

Theorem 41

La positivité (resp. nullité) est une propriété de classe.

Preuve. Soit j un état nul et $i \leftrightsquigarrow j$, avec $i \neq j$; $\exists(n_1, n_2)$ tels que pour tout $n \geq 0$, on ait $p_{j,i}^{(n_2)} > 0, p_{i,j}^{(n_1)}$ et $p_{j,j}^{(n_2+n+n_1)} \geq p_{j,i}^{(n_2)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(n_1)}$, alors $\lim_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = 0$ et l'état i est aussi nul.
Si j est positif en utilisant $p_{i,i}^{(n_2+n+n_1)} \geq p_{i,j}^{(n_2)} p_{j,j}^{(n)} p_{j,i}^{(n_1)}$, on a

$$\limsup_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)} > 0 \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} > 0. \quad \square$$

Theorem 42

Les temps d'atteinte moyen $M_{i,j}$ vérifient dans $[1, +\infty]$:

$$M_{i,j} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} M_{k,j} \tag{9}$$

Preuve. En appliquant (1) on a

$$\begin{aligned} P(T_j = n \mid X_0 = i) &= \sum_k P(T_j = n \mid X_0 = i, X_1 = k) \\ &\quad P(X_1 = k \mid X_0 = i), \end{aligned}$$

$$E(T_j \mid X_0 = i) = \sum_k E(T_j \mid X_1 = k, X_0 = i) p_{i,k},$$

Alors

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= E(T_j \mid X_0 = i) \\ &= p_{i,j} E(T_j \mid X_1 = j) + \sum_{k \neq j} p_{i,k} E(T_j \mid X_1 = k, X_0 = i) \\ &= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} (1 + M_{k,j}) \\ &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} M_{k,j}. \square \end{aligned}$$

Soient $M = (M_{i,j})$ et U la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1, M^{δ} la matrice obtenue de M en remplaçant les coefficients diagonaux par 0 et $\Delta = M - M^{\delta}$.
Alors le système (9) peut s'écrire

$$M = U + \mathcal{P}(M - \Delta). \tag{10}$$

Theorem 43

Si la chaîne est irréductible et si la seule classe dont elle est formée est positive, alors la matrice est à coefficients finis.

Preuve. D'après (10) on a

$$\begin{aligned} M &= U + \mathcal{P}M - \mathcal{P}\Delta \\ &= U + \mathcal{P}(U + \mathcal{P}M - \mathcal{P}\Delta) - \mathcal{P}\Delta \end{aligned}$$

Or $\mathcal{P}U = U$, on obtient donc

$$M + (\mathcal{P} + \ldots + \mathcal{P}^n)\Delta = nU + \mathcal{P}^n M. \qquad (11)$$

Soit i un état positif. En prenant le coefficient diagonal (i, i) de (11), on a pour tout $n \geq 1$,

$$(1 + p_{i,i} + \ldots + p_{i,i}^{(n)})M_{i,i} = n + \sum_k p_{i,k}^{(n)} M_{k,i} \tag{12}$$

Soit $j \neq i$. Par hypothèse $i \leftrightsquigarrow j$, donc il existe n_0 tel que $\alpha = p_{i,j}^{(n_0)} > 0$. L'égalité (12) implique

$$\begin{aligned} +\infty &> (1 + p_{i,i} + \ldots + p_{i,i}^{(n_0)})M_{i,i} \\ &= n_0 + \sum_k p_{i,k}^{(n_0)} M_{k,i} \\ &\geq n_0 + \alpha M_{j,i} \end{aligned}$$

D'où $M_{j,i}$ est fini. $\square$

Corollaire 44

Soit C une classe positive. Alors tous les coefficients $M_{i,j}$ pour $i, j \in C$, sont finis.

Preuve. La classe C est forcément récurrente, elle est donc close, et la restriction de la chaîne aux seuls états de C est irréductible et formée évidemment d'une seule classe positive.

Definition 45

Soit u une loi de probabilité sur l'ensemble des états. Elle est dite stationnaire si $u = u\mathcal{P}$ que l'on peut écrire.

$$u_j = \sum_{i \in S} u_i p_{i,j}. \tag{13}$$

Lemme 46

Si le nombre des états est fini, alors

$$\mathcal{P}^n \xrightarrow{C} \Pi \tag{14}$$

De plus, la matrice Π *est stochastique et l'on a* $\mathcal{P}\Pi = \Pi\mathcal{P} = \Pi, \Pi^2 = \Pi.$

$u_n \xrightarrow{C} u$ est la convergence au sens de Cesaro de u_n vers u, c'est dire

$$\lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)/n = u. \tag{15}$$

Lemme 47

Si j est transient, alors

$$p_{i,j}^{(n)} \xrightarrow{C} 0,$$

d'où $\pi_{i,j} = 0$.

Preuve. D'après la proposition 26 on a $p_{i,j}^{(n)} \longrightarrow 0$, donc $p_{i,j}^{(n)} \xrightarrow{C} 0$. □

Lemme 48

Si la chaîne a un nombre fini d'états et irréductible, alors pour tout (i,j) *on a*

$$\pi_{i,j} = \frac{1}{M_{j,j}} = \pi_j, \tag{16}$$

où $M_{j,j} = E(T_j \mid X_0 = j)$ *est le temps moyen de retour de* j *en* j.

Preuve. D'après le corollaire 44, la matrice $M = (M_{i,j})$ est à coefficients finis. En divisant (11) par n et faisant tendre n vers l'infini on obtient $\Pi\Delta = U$, donc pour tout (i,j), $\pi_{i,j}M_{j,j} = 1$. □

Theorem 49

Si X_n a un ensemble fini d'états, alors
i. Il existe au moins une loi de probabilité stationnaire; plus précisément, à toute loi initiale $u^{(0)}$ on peut lui faire associer la loi de probabilité stationnaire $u = u^{(0)}\Pi$.
ii. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:
1. La loi de probabilité stationnaire est unique;
2. Pour tout (i, j), $\pi_{i,j} = \pi_j$;
3. X_n n'admet qu'une seule classe récurrente.
Si l'une des trois propriétés est vérifiée, l'unique loi de probabilité stationnaire est donnée par $u_j = \pi_j$; en outre cette loi est chargée par l'unique classe récurrente C, i.e
$j \in C \iff u_j > 0$ *et* $j \notin C \iff u_j = 0$.

Theorem 50

Si X_n a un ensemble fini d'états et irréductible, alors il existe une et une seule loi de probabilité stationnaire donnée par

$$u_i = \pi_i = \frac{1}{M_{i,i}}. \tag{17}$$

Preuve. S'obtient du lemme 48 et du thèorème 49.

Preuve directe. On sait qu'il existe une loi de probabilité stationnaire. Montrons qu'elle unique.

En multipliant (10) par u on obtient

$$\begin{aligned} uM &= uU + u\mathcal{P}(M - \Delta) \\ &= uU + UM - u\Delta \text{ car } u\mathcal{P} = u \end{aligned}$$

soit $u\Delta = (u_1 M_{1,1}, u_2 M_{2,2}, ...) = uU =$
$(u_1 + u_2 + ..., u_1 + u_2 + ..., ...) = (1, 1, ...)$, c'est dire que pour tout i, $u_i = 1/M_{i,i}$.

Lemme 51

On a

$$\mathcal{P}^n \xrightarrow{C} \Pi \tag{18}$$

De plus, la matrice Π *est une matrice sous-stochastique i.e.* $\sum_j \pi_{i,j} \leq 1$, *et l'on a* $\mathcal{P}\Pi = \Pi\mathcal{P} = \Pi$.

Theorem 52

Si X_n *n'a que des états transients, alors il n'existe pas de loi de probabilité stationnaire.*

Preuve. Supposons qu'il existe u telle que $u = u\mathcal{P}$, donc $u = u\mathcal{P}^n$. Alors, pour tout $n \geq 0$, et tout état j, on a $u_j = \sum_i u_i p_{i,j}^{(n)}$. Comme tous les états sont transients, tous les temes $p_{i,j}^{(n)}$ tendent vers 0. Comme ensuite les termes $u_i p_{i,j}^{(n)}$ sont majorés par 1, on obtient

$$u_j = \lim_{n\to\infty} \sum_i u_i p_{i,j}^{(n)} = \sum_i \lim_{n\to\infty} u_i p_{i,j}^{(n)} = 0.$$

Tous les u_j seraient nuls, ce qui est impossible car $\sum_j u_j = 1$. $\square$

Theorem 53

Si X_n a au moins un état récurrent positif, alors il existe au moins une loi de probabilité stationnaire. Par exemple, si i est un état récurrent positif, donc $M_{i,i} < \infty$. Pour tout état j, on pose

$$\nu_j = E\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n=j, n\leq T_i-1\}} \mid X_0 = i\right). \tag{19}$$

C'est le nombre moyen de visites dans l'état j entre deux visites dans l'état i. Alors $u = (u_j)$ avec $u_j = \nu_j / M_{i,i}$, est une loi de probabilité stationnaire.

Preuve.

$$\nu_j = \sum_{n\geq 0} P\left(X_n = j, n \leq T_i - 1 \mid X_0 = i\right).$$

Si $j \neq i$, on a $P\left(X_0 = j, 0 \leq T_i - 1 \mid X_0 = i\right) = 0$, on a aussi $P\left(X_n = j, n = T_i \mid X_0 = i\right) = 0$ (car $n = T_i \Longrightarrow X_n = i$).

Donc

$$\nu_j = \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = j, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \tag{20}$$

$$\tag{21}$$

$$\nu_j = \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = j, n \leq T_i - 1 \mid X_0 = i\right). \tag{22}$$

D'autre part $P\left(X_0 = i, 0 \leq T_i - 1 \mid X_0 = i\right) = 1$ (car $\{T_i \leq 1\} = \Omega$) et pour $n \geq 1$,
$P\left(X_n = i, n \leq T_i - 1 \mid X_0 = i\right) = 0$, de sorte que $\nu_i = 1$.
Comme i est récurrent, la relation
$1 = f_{i,i} = \sum_{n\geq 1} P\left(T_i = n \mid X_0 = i\right)$ est vérifiée; or elle peut aussi s'écrire $1 = \nu_i = \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = i, n \leq T_i \mid X_0 = i\right)$;
donc (21) est vraie pour tout $j \in S$.

On la récrit

$$\begin{aligned}
\nu_j &= P\left(X_1 = j, 1 \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
&+ \sum_{n \geq 2} P\left(X_n = j, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
&= p_{i,j} + \sum_{n \geq 2} P\left(X_n = j, n \leq T_i \mid X_0 = i\right).
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
& P\left(X_n = j, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
= & \sum_{k \neq i} P\left(X_{n-1} = k, X_n = j, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
= & \sum_{k \neq i} P\left(X_n = j \mid X_{n-1} = k, n \leq T_i, X_0 = i\right) \\
& P\left(X_{n-1} = k, n \leq T_i \mid X_0 = i\right)
\end{aligned}
$$

Or l'événement $\{n \leq T_i\} = \{X_1 \neq i, ..., X_{n-1} \neq i\}$ appartient à $\sigma(X_0, ..., X_{n-1})$. En outre si $k \neq i$, on a

$$\{n \leq T_i\} \cap \{X_{n-1} = k\} \neq \emptyset,$$

de sorte que l'on peut effacer $\{n \leq T_i\}$ du conditionnement du terme précédent.

$$
\begin{aligned}
\nu_j &= p_{i,j} + \sum_{n\geq 2} P\left(X_n = j, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
&= p_{i,j} + \sum_{n\geq 2} \sum_{k\neq i} p_{k,j} P\left(X_{n-1} = k, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
&= p_{i,j} + \sum_{k\neq i} \sum_{n\geq 2} p_{k,j} P\left(X_{n-1} = k, n \leq T_i \mid X_0 = i\right) \\
&= p_{i,j} + \sum_{k\neq i} p_{k,j} \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = k, n \leq T_i - 1 \mid X_0 = i\right) \\
&= p_{i,j} + \sum_{k\neq i} p_{k,j}\nu_k = \sum_{k} p_{k,j}\nu_k .
\end{aligned}
$$

D'autre part dans $[0,\infty]$,

$$\begin{aligned}
\sum_j \nu_j &= \sum_j E\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{X_n=j, n\leq T_i-1\}} \mid X_0=i\right)\\
&= E\left(\sum_{n\geq 0}\sum_j \mathbf{1}_{\{X_n=j, n\leq T_i-1\}} \mid X_0=i\right)\\
&= E\left(\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{\{n\leq T_i-1\}} \mid X_0=i\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} P\left(T_i>n, \mid X_0=i\right)\\
&= E(T_i \mid X_0=i) = M_{i,i}
\end{aligned}$$

Si i est récurrent positif, alors $M_{i,i} < \infty$, et on peut poser $u_j = \nu_j / M_{i,i}$. Il en resulte que $u = (u_j)$ est une loi de probabilité stationnaire. $\square$

Theorem 54

Si X_n a une infinité dénombrable d'états et si elle est irréductible et récurrente positive, alors il existe une et une seule loi de probabilité stationnaire donnée par $u_i = 1/M_{i,i}$. De plus le nombre moyen ν_j de visites dans l'état j entre deux visites dans l'état i est donné par $\nu_j = M_{i,i}/M_{j,j}$.

Preuve. L'existence s'obtient du théorème 53. Pour Montrer l'unicité, soit u une loi de probabilité stationnaire. En multipliant (10) par u on obtient

$$uM = uU + u\mathcal{P}(M - \Delta) = uU + u(M - \Delta);$$

soit $u\Delta = uU$; donc $u_i M_{i,i} = 1$. D'après le théorème 53, pour tout i, la loi $u = (u_j)$ avec $u_j = \nu_j / M_{i,i}$ est une loi stationnaire, donc l'unicité de u implique que $\nu_j / M_{i,i} = 1/M_{j,j}$.$\square$

Definition 55

On dit qu'un état est ergodique s'il est récurrent ($f_{i,i} = 1$), positif ($M_{i,i} < \infty$) et apériodique.

Theorem 56

Si X_n a un nombre fini d'états et si toutes les classes récurrentes sont apériodiques (donc ergodiques), alors $\mathcal{P}^n \longrightarrow \Pi$, avec Π une matrice stochastique vérifiant $\mathcal{P}\Pi = \Pi\mathcal{P} = \Pi$.
Si X_n est irréductible et ergodique, alors pour tout $(i,j), \pi_{i,j} = \pi_j$.