

Rappels de probabilités (exercices)

Prépa Agreg Option A

Nathan Huguenin

Ces exercices sont tirés des polys de Marie-Line Chabanol (disponibles sur sa page web). Pour le cours, on peut se référer par exemple aux trois premiers chapitres du Chabanol-Ruch, ou n'importe quel cours de théorie des probabilités.

1 Espaces probabilisés

Exercice 1.1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Écrire les événements suivants à l'aide d'opérations ensemblistes :

- $E_1 = \text{"au moins un des } A_n \text{ est réalisé"}$,
- $E_2 = \text{"tous les } A_n \text{ sont réalisés"}$,
- $E_3 = \text{"à partir de } n = 500 \text{ aucun } A_n \text{ n'est réalisé"}$,
- $E_4 = \text{"un nombre fini de } A_n \text{ est réalisé"}$,
- $E_5 = \text{"une infinité de } A_n \text{ sont réalisés"}$,
- $E_6 = \text{"tous les } A_n \text{ sauf un nombre fini sont réalisés"}$.

Exercice 1.2. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

1. Démontrer la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1 \leq j \leq n} A_j\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right).$$

2. Démontrer les égalités suivantes :

$$\liminf A_n^c = (\limsup A_n)^c, \quad \limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n.$$

3. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup A_n).$$

4. On suppose que les événements $(A_n)_{n \geq 0}$ sont presque certains, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A_n) = 1$. Démontrer que $\bigcap_{n \geq 1} A_n$ est presque certain.

Exercice 1.3. Dans un espace probabilisé, on suppose qu'on dispose d'une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements indépendants. Démontrer :

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \exp\left(-\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)\right).$$

2 Probas discrètes

Exercice 2.1. N personnes déposent leur parapluie à l'entrée d'un restaurant. En partant, chacune récupère un parapluie au hasard : la première choisit le sien de manière uniforme parmi les N parapluies, la deuxième en prend un de façon uniforme parmi les $N - 1$ restants, etc.

1. Montrer qu'on peut prendre comme espace de probabilités Ω l'ensemble S_n des permutations de n éléments, muni de la loi uniforme.
2. Quelle est la probabilité que la première personne récupère son parapluie ? Quelle est la probabilité que la i -ème personne récupère son parapluie ? Ces événements sont-ils indépendants ?
3. Quelle est l'espérance du nombre de personnes qui récupèrent leur propre parapluie ?
4. Déterminer la probabilité p_N qu'au moins une personne récupère son parapluie. Que devient p_N lorsque $N \rightarrow \infty$?

Exercice 2.2. Les gènes se présentent le plus souvent en paires et sous deux formes d'allèles que nous noterons A et B . Cela donne donc trois génotypes possibles : AA , AB et BB . Chaque individu reçoit au hasard un gène de chacun de ses parents, chaque allèle ayant la probabilité $1/2$ d'être transmis. On suppose que les génotypes des deux parents sont indépendants et de même loi : soit x la probabilité d'avoir le génotype AA , $2y$ celle d'avoir le génotype AB , et z celle d'avoir le génotype BB (avec $x + 2y + z = 1$).

1. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant.
2. Vérifier que si $x = y = z = 1/4$, alors les génotypes de l'enfant ont les mêmes probabilités que ceux des parents.
3. Calculer la probabilité de chacun des génotypes pour un enfant de la seconde génération. Que constatez-vous ? (Loi de Hardy-Weinberg.)

Exercice 2.3. Une classe est constituée de 20 élèves tous nés la même année. Si on considère que leur date d'anniversaire est indépendante et distribuée uniformément sur $[[1, 365]]$, quelle est la probabilité qu'il y ait deux "jumeaux" dans la classe ? À partir de combien d'élèves dans la classe cette probabilité est-elle au moins 0.5 ?

Exercice 2.4. On désigne par N le nombre de champignons ramassés par un cueilleur de champignons en un jour. On suppose que N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonction génératrice G . On suppose que la probabilité qu'un champignon cueilli soit comestible est p , que le fait qu'un champignon cueilli soit comestible est indépendant du fait que les autres le soient, ainsi que du nombre de champignons ramassés. Montrer que la probabilité que tous les champignons cueillis soient comestibles est $G(p)$.

Exercice 2.5. On considère un processus de Bernoulli de paramètre p , c'est-à-dire une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p ($q = 1 - p$). On note L le plus grand entier tel que $X_1 = X_2 = \dots = X_L$ et M le plus grand entier tel que $X_{L+1} = X_{L+2} = \dots = X_{L+M}$.

1. Déterminer les lois de L et M . Pour quelles valeurs de p les deux lois coïncident-elles ?
2. Montrer que $\mathbb{E}(L) \geq \mathbb{E}(M) = 2$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(M = n \mid L = l) = \begin{cases} p^{n-1}q, & \text{si } p < \frac{1}{2}, \\ q^{n-1}p, & \text{si } p > \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3 Modèles d'urnes

Exercice 3.1. Une urne contient N boules de K couleurs différentes : N_1 boules de couleur 1, ..., N_K boules de couleur K avec $\sum N_i = K$. Soit $p_i = N_i/N$ la proportion initiale de boules de couleur i . On tire au hasard $n \leq N$ boules et on note $P_{n_1, \dots, n_K}$ (avec $\sum n_i = n$) la probabilité d'obtenir n_1 boules de couleur 1, etc... Déterminer $P_{n_1, \dots, n_K}$ dans le cadre de tirages avec ou sans remise. Dans le cas $K = 2$, donner l'espérance et la variance des lois obtenues.

Exercice 3.2. On considère une urne qui contient r boules rouges et b boules blanches. Soit M un entier > 0 . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages avec remise nécessaires à l'obtention de M boules rouges. Caractériser la loi de X .

4 Variables à densité

Exercice 4.1. Déterminer la fonction caractéristique d'une loi exponentielle de paramètre λ , et d'une loi de Poisson de paramètre μ .

Exercice 4.2. Trois personnes A , B et C arrivent simultanément à la poste où deux guichets sont ouverts. A et B se rendent chacun à un guichet, C attend et ira au premier guichet libéré. On suppose que le temps que passe chaque personne au guichet suit une loi exponentielle de paramètre 1, et que ces temps sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que C sorte le dernier ?
2. Quelle est l'espérance du temps passé à la poste par C ?

Exercice 4.3. Convolution. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer la densité de $X + Y$.

Exercice 4.4. Soient X et Y deux v.a. à densité indépendantes. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$. Si on suppose que X et Y ont en plus la même loi, calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 4.5. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des v.a. i.i.d. de densité f . Donner la loi du couple $(\min X_i, \max X_i)$.

Exercice 4.6. Lois gamma, χ^2 , Student. Pour $a > 0$ on pose

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

On appelle loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $G(a, \lambda)$, la loi sur $\mathbb{R}$ de densité

$$\gamma_{a, \lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Rappels : $\Gamma(a)$ est défini pour $a > 0$; $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

1. Soit X une variable aléatoire de loi $G(a, \lambda)$. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\text{Var}(X)$.
2. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi $G(a, \lambda)$ et $G(b, \lambda)$. Montrer que $X + Y$ suit une loi $G(a+b, \lambda)$, et montrer

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. Donner la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

4. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que Y^2 suit la loi gamma $G(1/2, 1/2)$. En déduire $\Gamma(1/2)$.
5. Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont n variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, exprimer en termes de loi Γ la loi de $Z = Y_1^2 + \dots + Y_n^2$ et retrouver $\mathbb{E}[Z]$ et $\text{Var}(Z)$.
6. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Z une variable aléatoire indépendante de Y de loi du χ^2 à n degrés de liberté. Déterminer la densité de

$$\frac{\sqrt{n}Y}{\sqrt{Z}}$$

(loi de Student à n degrés de liberté).

5 Autres exercices

Exercice 5.1. Estimateurs de la moyenne et de la variance. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même espérance m et de même variance $\sigma^2 > 0$.

1. On pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer l'espérance et la variance de $\bar{X}_n$. (Réponse : m et $\frac{\sigma^2}{n}$).
2. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n (X_k - m)^2$. Calculer l'espérance de Y_n . (Réponse : $n\sigma^2$).
3. On pose $Z_n = \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$. Calculer l'espérance de Z_n . (Réponse : $(n-1)\sigma^2$).

Exercice 5.2. On considère $\Omega = [0, 2\pi]$ muni de la probabilité uniforme. On s'intéresse aux deux variables aléatoires X et Y obtenues en prenant l'abscisse, respectivement l'ordonnée, du point du cercle trigonométrique d'angle $\omega \in \Omega$.

1. Donner la loi de X et celle de Y .
2. X et Y sont-elles indépendantes ? Les événements " $X \geq 0$ " et " $Y \leq 0$ " sont-ils indépendants ?
3. On considère maintenant un point aléatoire (X, Y) de loi uniforme sur le disque unité. Quelle est la loi de X ? On note R et Θ ses coordonnées polaires ($\Theta \in [0, 2\pi]$). Quelle est la loi de R ? Quelle est la loi de Θ ? R et Θ sont-elles indépendantes ?