

Rapport de stage - Marches aléatoires en milieux aléatoires

Nathan Huguenin
Université d'Aix-Marseille Master 2 CEPS

Directeur : Pierre Mathieu
Institut de Mathématiques de Marseille

Tuteur en Allemagne : Noam Berger
Technische Universität München

Avril-Juin 2022



Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Organisation du mémoire	2
1.2	Environnements aléatoires	2
1.3	Marche aléatoire en environnement aléatoire	3
1.4	L'environnement vu de la particule	4
2	Théorèmes limite dans le cas uniformément elliptique	6
2.1	Rappel : théorèmes ergodiques et différences de martingales	6
2.2	Inégalités pour les fonctions ω -harmoniques	6
2.2.1	Définitions et notations	6
2.2.2	Principe du maximum	7
2.2.3	Une inégalité de la moyenne	9
2.3	Théorèmes limite pour les marches aléatoires en environnements uniformément elliptiques	11
2.3.1	Loi forte des grands nombres	11
2.3.2	Théorème central limite <i>quenched</i>	12
2.3.3	Principe d'invariance	20
3	Récurrance et transience	22
3.1	Rappel des théorèmes utilisés	22
3.2	Récurrance pour $d \leq 2$	22
3.3	Transience pour $d \geq 3$	23
3.4	Contre-exemples	25

1 Introduction

Un problème classique émergeant de plusieurs domaines d'application tels que la biologie, la cristallographie ou la physique statistique, est la modélisation mathématique du transport dans un milieu hautement inhomogène. Autour de 1970, les marches aléatoires en milieux aléatoires sont introduites par Chermov et Temkin pour répondre au problème (on pourra consulter [DR14] pour des références). Il s'agit aujourd'hui d'un objet fondamental de la théorie des Probabilités, qui constitue encore un domaine de recherche très actif. Le principe général est de choisir de manière aléatoire les probabilités de transition de la marche aléatoire sur un certain réseau (le plus souvent, $\mathbb{Z}^d$). Ceci permet de représenter le déplacement d'une particule dans un milieu, n'imposant à celui-ci que des propriétés globales (à travers la mesure de probabilité choisie) et permettant localement de (plus ou moins) grandes irrégularités.

Le travail réalisé lors de ce stage concerne une classe particulière de marches appelées *équilibrées* (ou *centrées*), qui sont alors des martingales. On suit un schéma classique d'étude des marches aléatoires, à savoir l'établissement de théorèmes limite (loi des grands nombre, théorème central limite et principe d'invariance), puis l'étude des propriétés de transience et récurrence. L'essentiel de ce travail repose sur le cours d'Ofer Zeitouni donné à l'école d'été de St Flour ([Zei01]).

Je tiens à remercier Pierre Mathieu de l'Institut de Mathématiques de Marseille pour m'avoir fait découvrir à travers ce stage le domaine très riche des marches aléatoires en milieux aléatoires. Je remercie également Noam Berger et toute l'équipe de probabilités de la Technische Universität München pour leur accueil chaleureux durant trois semaines de ce stage, ainsi que pour les échanges très intéressants que nous avons eu au cours de cette période.

1.1 Organisation du mémoire

On introduit dans la suite de cette section le cadre rigoureux adapté à l'étude des marches aléatoires en milieux aléatoires : on y donne les définitions des objets rencontrés dans la suite (environnements aléatoires, marches aléatoires en environnement aléatoire...), leurs propriétés essentielles, ainsi que les hypothèses que nous ferons tout au long du mémoire. La seconde section est consacrée aux théorèmes limites pour la marche aléatoire en milieu aléatoire. On y démontre des résultats "de type EDP" utiles dans la suite, puis le théorème central limite (ou principe d'invariance), qui est le résultat principal. Dans la troisième partie on étudie la transience ou récurrence de la marche.

1.2 Environnements aléatoires

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, on note $N_x = \{y \in \mathbb{Z}^d : |y - x|_\infty = 1\}$ le voisinage de x , et $\mathcal{M}(N_x)$ l'ensemble des mesures de probabilités supportées par N_x . On munit l'espace produit $\Omega = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{M}(N_x)$ de la tribu Borélienne $\mathcal{F}$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les événements à support fini (ie cylindriques). Etant donnée une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω , on appelle les éléments de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *environnements aléatoires*.

Remarque 1.1.

- i) Ω est compact par le théorème de Tykhonov
- ii) Pour simplifier, on fait ici le choix de ne pas inclure x dans son voisinage. Toutefois, les résultats établis resteraient vrais sans plus d'effort si on autorisait ces boucles.

Pour $\omega \in \Omega$, $x \in \mathbb{Z}^d$ et $i = 1, \dots, d$, on note ω_x la mesure sur N_x associée à ω et $\omega_x(\pm e_i)$ la probabilité associée à $x \pm e_i \in N_x$, où e_i est le vecteur $(\delta_{ij})_{j=1, \dots, d}$. On définit l'opérateur de translation sur les environnements, ou *shift*, θ , par

$$\theta^x \omega_y = \omega_{x+y}$$

pour tout $\omega \in \Omega$, tous $x, y \in \mathbb{Z}^d$.

On fait maintenant des hypothèses sur la loi $\mathbb{P}$ des environnements, qu'on supposera vérifiées tout au long de ce mémoire.

Hypothèse 1.2.

- 1) *Invariance par translation* : pour tout $A \in \mathcal{F}$, et tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}(\theta^x A) = \mathbb{P}(A)$
- 2) *Ergodicité* : pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta^x A = A$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$
- 3) *Equilibre* : Pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout $i = 1, \dots, d$, $\omega_x(e_i) = \omega_x(-e_i)$.

1.3 Marche aléatoire en environnement aléatoire

Etant donné $\omega \in \Omega$ fixé, la marche aléatoire dans l'environnement ω est la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \geq 0}$ définie par les probabilités de transition :

$$P^\omega(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = \sum_{i=1}^d \omega_{x_n}(\pm e_i) \delta_{x_n \pm e_i}(x_{n+1})$$

pour tous $x_{n+1}, x_n \in \mathbb{Z}^d$ et tout $i = 1, \dots, d$. (Où $\delta_x(y) = \mathbb{1}_{\{x=y\}}$.)

On munit $(\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$ de la tribu $\mathcal{G}$ engendrée par les évènements cylindriques, et on note P_x^ω la mesure de probabilité induite sur $((\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}, \mathcal{G})$ par P^ω , telle que $P_x^\omega(X_0 = x) = 1$. La loi P_x^ω est appelée la loi *quenched* (qu'on pourrait traduire par *individuelle*) de la marche aléatoire (X_n) .

Le noyau de transition de la marche est donné par

$$T_\omega(x, dy) = \sum_{i=1}^d (\omega_x(e_i) \delta_{x+e_i} + \omega_x(-e_i) \delta_{x-e_i})$$

Si $\omega \in \Omega$ est équilibré (hypothèse 1.2-3), on peut écrire

$$T_\omega(x, dy) = \sum_{i=1}^d \omega_x(e_i) (\delta_{x+e_i} + \delta_{x-e_i})$$

Le générateur de la marche est alors donné par

$$L_\omega f(x) = (T_\omega - \text{Id})f(x) = \sum_{i=1}^d \omega_x(e_i) (f(x+e_i) + f(x-e_i) - 2f(x)) \quad (1.1)$$

pour toute fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

En moyennant la loi *quenched* contre la mesure $\mathbb{P}$, on obtient la loi *annealed* (ou *moyennée*) $\mathbf{P}_x$ de (X_n) , c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\mathbf{P}_x(A) = \mathbb{E}(P_x^\omega(A)) = \int_{\Omega} P_x^\omega(A) \mathbb{P}(d\omega)$$

Notons que la marche (X_n) n'est pas une chaîne de Markov pour la loi $\mathbf{P}_x$.

L'hypothèse d'équilibre confère à la marche la propriété de martingale :

Proposition 1.3. *Notons $\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. La marche (X_n) est une martingale pour la filtration $\mathcal{G}_n$.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, on a $X_{n+1} - X_n \in \{\pm e_i, i = 1, \dots, d\}$, et

$$P_x^\omega(X_{n+1} - X_n = e_i | \mathcal{G}_n) = \omega_{X_n}(e_i) = \omega_{X_n}(-e_i) = P_x^\omega(X_{n+1} - X_n = -e_i | \mathcal{G}_n)$$

grâce à l'hypothèse 1.2 (3). Ainsi,

$$E_x^\omega[X_{n+1} - X_n | \mathcal{G}_n] = E_{X_n}^\omega(X_1 - X_0) = \sum_{i=1}^d [e_i \omega_{X_n}(e_i) - e_i \omega_{X_n}(-e_i)] = 0$$

et donc $E_x^\omega[X_{n+1} | \mathcal{G}_n] = X_n$. □

Remarque 1.4. La propriété de martingale dans le cas équilibré permet l'utilisation de théorèmes puissants (loi des grands nombres, théorème central limite et principe d'invariance pour les martingales), qui ne serait pas possible sans cette hypothèse.

Donnons à présent des exemples de marches aléatoires dans des environnements particuliers.

Exemple 1.5.

- i) Si on pose $\omega_x(\pm e_i) = \frac{1}{2d}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_d$ et tout $i = 1, \dots, d$, la loi P_x^ω est celle de la marche aléatoire simple issue de x dans $\mathbb{Z}^d$.
- ii) Sur $\mathbb{Z}^2$. Posons $\frac{1}{4} < p < \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2} - p$. Posons ensuite

$$\omega_x(e) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x_1 = \pm x_2 \\ p & \text{si } e = \pm e_2 \text{ et } |x_1| > |x_2|, \text{ ou si } e = \pm e_1 \text{ et } |x_1| < |x_2| \\ q & \text{si } e = \pm e_1 \text{ et } |x_1| > |x_2| \text{ ou si } e = \pm e_2 \text{ et } |x_1| < |x_2| \end{cases}$$

On verra que la chaîne (X_n) dans cet environnement est transiente bien qu'en dimension 2.

On va maintenant présenter un point de vue central dans l'étude des marches aléatoires en milieux aléatoires.

1.4 L'environnement vu de la particule

L'environnement vu de la particule désigne une chaîne de Markov auxiliaire qui représente l'environnement translaté par les pas successifs de la marche aléatoire. On le définit comme suit : étant donné $\omega \in \Omega$ fixé, on pose

$$\bar{\omega}_n = \theta^{X_n} \omega$$

Remarque 1.6. Bien que $\bar{\omega}_n$ soit un environnement dans Ω , notera $\bar{\omega}_n(x, \pm e_i)$ pour la probabilité de $x \pm e_i \in N_x$.

Proposition 1.7. La suite $(\bar{\omega}_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov pour les lois P_0^ω et P_0 , de noyau de transition

$$M(\omega, d\omega') = \sum_{i=1}^d (\omega_0(e_i) \delta_{\theta^{e_i} \omega} + \omega_0(-e_i) \delta_{\theta^{-e_i} \omega})$$

Démonstration. Soient $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ des fonctions bornées de Ω dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^n f_i(\bar{\omega}_i) \right) &= E_0^\omega \left(E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^n f_i(\bar{\omega}_i) | \mathcal{G}_{n-1} \right) \right) \\ &= E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(\bar{\omega}_i) E_0^\omega [f_n(\theta^{X_n} \omega) | \mathcal{G}_{n-1}] \right) \\ &= E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(\bar{\omega}_i) E_{X_{n-1}}^\omega (f_n(\theta^{X_n} \omega)) \right) \\ &= E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(\bar{\omega}_i) \left[\sum_{j=1}^d (\omega_{X_{n-1}}(e_j) f_n(\theta^{e_j} \theta^{X_{n-1}} \omega)) + \omega_{X_{n-1}}(-e_j) f_n(\theta^{-e_j} \theta^{X_{n-1}} \omega) \right] \right) \\ &= E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(\bar{\omega}_i) \int_{\Omega} f_n(\omega') M(\theta^{X_{n-1}} \omega, d\omega') \right) \\ &= E_0^\omega \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(\bar{\omega}_i) M f_n(\bar{\omega}_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

Et donc $(\bar{\omega}_n)_n$ est une chaîne de Markov pour P_0^ω . En intégrant les deux côtés de l'égalité par rapport à $\mathbb{P}$, on obtient

$$\mathbf{E}_0 \left(\prod_{i=1}^n f_i(\bar{\omega}_i) \right) = \mathbf{E}_0 \left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i(\bar{\omega}_i) M f_n(\bar{\omega}_{n-1}) \right)$$

D'où la même conclusion pour la loi $\mathbf{P}_0$. □

Remarque 1.8. *Pour une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on note f^ω la fonction de $\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f^\omega(x) = f(\theta^x \omega)$. On a alors le lien suivant entre les opérateurs M et T_ω :*

$$Mf(\omega) = T_\omega f^\omega(0)$$

2 Théorèmes limite dans le cas uniformément elliptique

Le principal objectif de cette partie est d'obtenir un principe d'invariance (théorème central limite pour les trajectoires) pour la marche aléatoire en milieu aléatoire, sous l'hypothèse supplémentaire sur les environnements suivante :

Hypothèse 2.1. *Uniforme ellipticité : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ et tout $i = 1, \dots, d$, $\omega_x(\pm e_i) \geq \varepsilon$.*

Dans la suite, on notera Ω_0 le sous-ensemble de Ω formé des environnements équilibrés et uniformément elliptiques. Notons que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.

Les idées qui composent la preuve du théorème central limite sont issues de la théorie ergodique, de la théorie des martingales et des équations aux dérivées partielles, ici dans le cadre discret. On rappelle dans la première section les principaux théorèmes utilisés, sans démonstration. La seconde section est consacrée aux preuves des inégalités de type EDP (principe du maximum, inégalité de la moyenne) dont on se sert dans la suite. La loi des grands nombre et le théorème central limite *quenched* sont démontrés dans la troisième section. On a choisi de détailler la preuve du théorème central limite plutôt que celle du principe d'invariance, mais cela n'a pas d'importance, la seule partie différente étant le théorème de théorie des martingales à utiliser.

2.1 Rappel : théorèmes ergodiques et différences de martingales

Dans cette section, on énonce sans preuve les principaux théorèmes utilisés dans la suite, issus de la théorie ergodique, ou de la théorie des martingales.

Théorème 2.2 (Théorème ergodique de Birkhoff [Dur19]). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et τ une transformation préservant la mesure et ergodique (tout événement invariant par τ a probabilité 0 ou 1). Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X \circ \tau^k \rightarrow \mathbb{E}X$$

presque sûrement et dans L^1 .

Soit (X_n) une suite de différences de martingales (réelles), on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et $\tilde{S}_t = S_{[t]} + (t - [t])(S_{[t+1]} - S_{[t]})$ l'interpolation affine de (S_n) .

Théorème 2.3 (Principe d'invariance pour les différences de martingales [Dur19]). *Soit (X_n) une suite de différences de martingales pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$, et soit $V_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$. Si*

i) $V_n/n \rightarrow \sigma^2 > 0$ en probabilité

ii) Pour tout $\epsilon > 0$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2 \mathbf{1}_{\{|X_k| > \epsilon n\}}] \rightarrow 0$ en probabilité

alors $(\tilde{S}_{nt}/\sqrt{n})_{t \geq 0}$ converge en loi vers σB , où B est un mouvement Brownien standard.

Corollaire 2.4 (TCL pour les différences de martingales). *Sous les mêmes hypothèses, $S_n/\sqrt{n} \rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ en loi.*

2.2 Inégalités pour les fonctions ω -harmoniques

Dans toute cette section, on fixe $\omega \in \Omega_0$.

2.2.1 Définitions et notations

Dans toute la suite du rapport, on notera $B(x, R)$ la boule centrée en $x \in \mathbb{Z}^d$ de rayon $R > 0$ pour la norme euclidienne $|\cdot|$. On note $B_R = B(0, R)$. La boule discrète centrée en 0 pour la norme $|\cdot|_\infty$ sera notée $D_R = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x|_\infty < R\}$.

Soit E un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ (on note $E \Subset \mathbb{Z}^d$). On note ∂E la *frontière extérieure* de E , c'est-à-dire l'ensemble $\{y \in E^c : \exists x \in E, |x - y|_\infty = 1\}$. On note ensuite $\overline{E} = E \cup \partial E$ sa *fermeture*, et $\text{diam}(E) = \max\{|x - y|_\infty, x, y \in \overline{E}\}$ son *diamètre*.

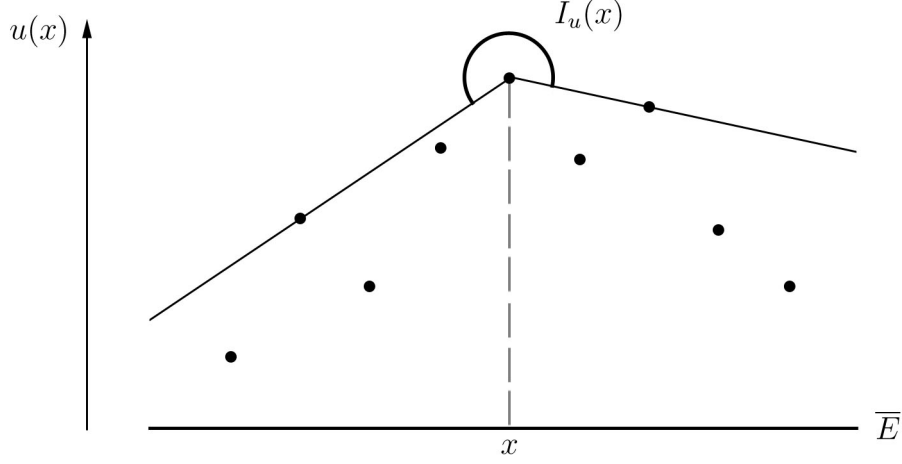


FIGURE 1 – L'ensemble de contact $I_u(x)$ en dimension $d = 1$

Soit $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$. On définit l'ensemble de contact au point $x \in E$ par

$$I_u(x) = \{s \in \mathbb{R}^d : u(z) \leq u(x) + s \cdot (z - x) \forall z \in \overline{E}\} \quad (2.1)$$

Pour $p > 0$ et $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$\|f\|_{L^p(E,u)} = \left(\frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_{\{I_u(x) \neq \emptyset\}} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2)$$

et

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\frac{1}{|E|} \sum_{x \in E} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3)$$

Une fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite ω -harmonique sur E si $L_\omega f(x) = 0$ pour tout $x \in E$, où L_ω est donné par (1.1).

L'exemple des fonctions de Green. Voici un exemple important de fonction ω -harmonique (dont nous nous servirons par la suite). Soit E un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ et $y \in E$. On note τ_E le temps de sortie $\inf\{n \geq 0 : X_n \notin E\}$. Alors la fonction $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_E)$ est ω -harmonique sur $E \setminus \{y\}$. En effet, pour $x \in E \setminus \{y\}$,

$$\begin{aligned} E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_E) &= \sum_{i=1}^d (E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_E | X_1 = x + e_i) P_x^\omega(X_1 = x + e_i) \\ &\quad + E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_E | X_1 = x - e_i) P_x^\omega(X_1 = x - e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^d \omega_x(e_i) (E_{x+e_i}^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_E) + E_{x-e_i}^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_E)) \end{aligned}$$

Où on a utilisé la propriété de Markov et le fait que ω est équilibré. On a donc $u(x) = T_\omega u(x)$, ie u est ω -harmonique.

2.2.2 Principe du maximum

La preuve de ce théorème est tirée de [Zei01]. C'est un équivalent discret du principe du maximum pour les solutions de l'équation de Poisson. Ce résultat est fondamental pour la preuve du théorème central limite, dans laquelle il permet d'obtenir une borne uniforme sur certaines densités.

Proposition 2.5 (Principe du maximum). *Il existe une constante $C = C(\varepsilon)$ telle que pour tout $E \in \mathbb{Z}^d$, et pour toutes fonctions $u : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $u|_{\partial E} = 0$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in E$,*

$$-L_\omega u(x) \leq f(x) \quad (2.4)$$

alors,

$$\max_E u \leq C \text{diam}(E) |E|^{1/d} \|f\|_{L^d(E, u)} \quad (2.5)$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $f \geq 0$ et u non identiquement nulle. On note $\bar{u} = \max_{\overline{E}} u = u(x_0)$ avec $x_0 \in E$.

Soit $s \in \mathbb{R}^d$ tel que $|s|_\infty < \frac{\bar{u}}{\text{diam}(E)}$. Pour $x \in \overline{E}$,

$$|s \cdot (x - x_0)| \leq |s|_\infty |x - x_0|_\infty < \frac{\bar{u}}{\text{diam}(E)} \text{diam}(E) = \bar{u}$$

Et donc $\bar{u} - |s \cdot (x - x_0)| > 0$, puis

$$\bar{u} + s \cdot (x - x_0) > 0 \quad (2.6)$$

Notons $t = \inf\{\rho \geq 0 : \bar{u} + s \cdot (z - x_0) + \rho \geq u(z) \forall z \in \overline{E}\}$, il existe donc $x \in \overline{E}$ tel que $\bar{u} + s \cdot (x - x_0) + t = u(x)$, et en fait, $x \in E$ à cause de (2.6). De plus pour tout $z \in \overline{E}$,

$$u(x) + s \cdot (z - x) = \bar{u} + s \cdot (z - x_0) + t \geq u(z)$$

Et donc $s \in I_u(x) \subset \cup_E I_u(x)$, d'où

$$\left\{ |s|_\infty < \frac{\bar{u}}{\text{diam}(E)} \right\} \subset \bigcup_{x \in E} I_u(x) \quad (2.7)$$

Supposons maintenant $s \in I_u(x)$ pour un certain $x \in E$. Soit $e \in \{\pm e_i, i = 1, \dots, d\}$. Pour $y \in E$ on pose $v(y) = u(x) + s \cdot (y - x)$. On a

$$0 = \omega_x(e)(2v(x) - v(x+e) - v(x-e)) \leq \omega_x(e)(2u(x) - u(x+e) - u(x-e))$$

où la deuxième inégalité vient du fait que $s \in I_u(x)$. Ainsi, en sommant sur e ,

$$0 \leq \omega_x(e)(2u(x) - u(x+e) - u(x-e)) \leq -L_\omega u(x) \leq f(x)$$

Puis,

$$(u(x) - u(x-e)) - (u(x+e) - u(x)) \leq \frac{f(x)}{\omega_x(e)} \leq \frac{f(x)}{\varepsilon}$$

Or, comme $s \in I_u(x)$ on a $u(x+e) \leq v(x+e) = u(x) + s \cdot e$ et $u(x-e) \leq v(x-e) = u(x) - s \cdot e$. Donc,

$$u(x+e) - u(x) \leq s \cdot e \leq u(x) - u(x-e)$$

Et enfin,

$$u(x) - u(x-e) - \frac{f(x)}{\varepsilon} \leq s \cdot e \leq u(x) - u(x-e)$$

Ce qui montre que si $I_u(x) \neq \emptyset$,

$$\text{Leb}(I_u(x)) \leq \left(\frac{f(x)}{\varepsilon} \right)^d \quad (2.8)$$

On a

$$\text{Leb} \left(\left\{ |s|_\infty < \frac{\bar{u}}{\text{diam}(E)} \right\} \right) = \left(\frac{2\bar{u}}{\text{diam}(E)} \right)^d$$

Donc par (2.7) et (2.8),

$$\left(\frac{2\bar{u}}{\text{diam}(E)}\right)^d \leq Leb\left(\bigcup_{x \in E} I_u(x)\right) \leq \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{\{I_u(x) \neq \emptyset\}} \left(\frac{f(x)}{\varepsilon}\right)^d$$

D'où,

$$\bar{u} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \text{diam}(\bar{E}) |E|^{1/d} \|f\|_{L^d(E,u)}$$

ce qui termine la preuve. □

2.2.3 Une inégalité de la moyenne

On rappelle que B_R désigne la boule ouverte de rayon R pour la norme euclidienne (dans $\mathbb{R}^d$), centrée en 0. La proposition suivante apparaît dans [Zei01], au cours de la preuve de l'inégalité (plus forte) de Harnack. Cette inégalité nous servira à prouver la transience de la marche (voir section 3.3).

On introduit au préalable les opérateurs aux différences suivants, pour une fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ et $i = 1, \dots, d$.

$$\begin{aligned} \delta_i^+ f(x) &= f(x + e_i) - f(x) \\ \delta_i^- f(x) &= f(x) - f(x + e_i) \\ \delta_i f(x) &= f(x + e_i) - f(x - e_i) \\ \delta_i^2 f(x) &= f(x + e_i) + f(x - e_i) - 2f(x) \end{aligned}$$

Proposition 2.6. *Soit $u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ω -harmonique positive sur B_R . Alors pour tout $p \leq d$, et pour tout $\sigma < 1$, il existe $C = C(p, \sigma, d)$ tel que*

$$\max_{B_{\sigma R}} u \leq C \|u\|_{L^p(B_R)} \quad (2.9)$$

Démonstration. L'idée est d'appliquer le principe du maximum à la fonction u correctement tronquée, avec un certain opérateur elliptique dérivé de L_ω .

Soit $\beta \geq 2$ à fixer plus tard. On introduit la fonction de troncature (définie sur B_R)

$$\eta(x) = \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right)^\beta$$

Calculons les dérivées partielles premières et secondes de η :

$$\begin{aligned} \partial_i \eta(x) &= -\frac{2\beta x_i}{R^2} \eta(x)^{1-\frac{1}{\beta}} \\ \partial_{ij}^2 \eta(x) &= -\frac{2\beta}{R^2} \eta(x)^{1-\frac{1}{\beta}} \delta_{ij} + \frac{4\beta(\beta-1)x_i x_j}{R^4} \eta(x)^{1-\frac{2}{\beta}} \end{aligned}$$

La fonction η est concave, ce qui implique

$$\eta(x + e_i) - \eta(x) \leq \partial_i \eta(x)$$

et,

$$\eta(x - e_i) - \eta(x) \leq -\partial_i \eta(x)$$

Et ainsi en utilisant l'expression des dérivées,

$$|\delta_i^\pm \eta(x)| \leq \frac{2\beta}{R} \eta(x)^{1-\frac{1}{\beta}} \leq \frac{2\beta}{R} \quad (2.10)$$

Par ailleurs, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral, pour obtenir

$$\eta(x + e_i) - \eta(x) \leq \partial_i \eta(x) + \int_0^1 (1-t) \partial_{ii}^2 \eta(x) dt$$

et,

$$\eta(x - e_i) - \eta(x) \leq -\partial_i \eta(x) + \int_0^1 (1-t) \partial_{ii}^2 \eta(x) dt$$

Or $\partial_{ii}^2 \eta(x) \leq \frac{4\beta(\beta-1)}{R^2}$, d'où

$$\int_0^1 (1-t) \partial_{ii}^2 \eta(x) dt \leq \frac{1}{2} \frac{4\beta(\beta-1)}{R^2}$$

Puis en sommant les inégalités,

$$|\delta_i^2 \eta(x)| \leq \frac{4\beta(\beta-1)}{R^2} \quad (2.11)$$

Les estimées (2.10) et (2.11) seront utiles plus tard.

Soient, pour $i = 1, \dots, d$ et $x \in B_R$, des nombres $\kappa_i = \kappa_i(x) \in [0, 1]$ à fixer. Soit $\nu = \eta u$ définie sur $\mathbb{Z}^d$. On définit l'opérateur $\hat{L}_\omega$ en posant

$$\hat{L}_\omega \nu(x) = \sum_{i=1}^d \hat{\omega}_x(e_i) \delta_i^2 \nu(x)$$

où

$$\hat{\omega}_x(e_i) := \begin{cases} \omega_x(e_i) \left(\frac{\kappa_i}{\eta(x-e_i)} + \frac{\kappa_i}{\eta(x+e_i)} \right) & \text{si } R^2 - |x|_2^2 \geq 4R \\ \omega_x(e_i) & \text{si } R^2 - |x|_2^2 < 4R \end{cases}$$

Soit x tel que $I_\nu(x) \neq \emptyset$, alors il existe $s \in I_\nu(x)$ tel que $|s|_2 \leq \frac{\nu(x)}{R - |x|_\infty}$. En effet, d'après la preuve du principe du maximum, dès que ν n'est pas identiquement nulle, en prenant $|s|_\infty < \frac{\bar{\nu}}{\text{diam}(\bar{D}_R)}$ où $\bar{\nu} = \nu(x_0) = \max_{\bar{D}_N} \nu$, on a pour tout $x \in \bar{D}_R$,

$$|s|_2 \leq |s|_\infty < \frac{\nu(x_0)}{|x - x_0|_\infty} \leq \frac{\nu(x_0)}{||x|_\infty - |x_0|_\infty|} \leq \frac{\nu(x_0)}{R - |x_0|_\infty}$$

Et $I_\nu(x_0)$ est non vide, ce qui prouve l'affirmation. De plus, encore selon la preuve du principe du maximum, on peut écrire

$$s_i = s_i(x) = \kappa_i(x) \delta_i^+ \nu(x) + (1 - \kappa_i(x)) \delta_i^- \nu(x)$$

où $\kappa_i \in [0, 1]$. On fixe donc les κ_i comme ceci.

Il nous faut obtenir une inégalité sur $\hat{L}_\omega \nu(x)$, cela passe par des calculs un peu fastidieux. On peut déjà réécrire (on omet la dépendance en x pour plus de lisibilité)

$$s_i = -\kappa_i(\delta_i^- - \delta_i^+) \nu + \delta_i^- \nu = (1 - \kappa_i)(\delta_i^- - \delta_i^+) \nu + \delta_i^+ \nu$$

On obtient ensuite

$$\begin{aligned} & [\kappa_i \eta(x + e_i) + (1 - \kappa_i) \eta(x - e_i)] (\delta_i^- - \delta_i^+) \nu(x) \\ &= -\delta_i \eta(x) s_i + \eta(x + e_i) \delta_i^- \eta(x) - \eta(x - e_i) \delta_i^+ \eta(x) \\ &= -\delta_i \eta(x) s_i + \eta(x) u(x) \delta_i \eta(x) - \eta(x + e_i) \eta(x - e_i) \delta_i u(x) \\ &= -\delta_\eta(x) s_i - \eta(x + e_i) \eta(x - e_i) \delta_i^2 u(x) + u(x) [\eta(x) \delta_i \eta(x) - 2\eta(x + e_i) \eta(x - e_i)] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & -[\kappa_i \eta(x + e_i) + (1 - \kappa_i) \eta(x - e_i)] \delta_i^2 \nu(x) \\ &= -\delta_\eta(x) s_i - \eta(x + e_i) \eta(x - e_i) \delta_i^2 u(x) + u(x) [2\delta_i^+ \eta(x) \delta_i^- \eta(x) - \eta(x) \delta_i^2 \eta(x)] \end{aligned}$$

En injectant ceci dans l'expression de $-\hat{L}_\omega \nu(x)$ pour $R^2 - |x|_2^2 \geq 4R$, on obtient que pour tout x dans ce domaine tel que $I_\nu(x) \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} -\hat{L}_\omega \nu(x) &= - \sum_{i=1}^d \omega_x(e_i) s_i \frac{\delta_i \eta(x)}{\eta(x+e_i)\eta(x-e_i)} \\ &\quad - L_\omega u(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \omega_x(e_i) u(x) \frac{2\delta_i^+ \eta(x) \delta_i^- \eta(x) - \eta(x) \delta_i^2 \eta(x)}{\eta(x+e_i)\eta(x-e_i)} \end{aligned}$$

Pour R suffisamment grand, la quantité $\eta(x+e_i)\eta(x-e_i)$ est strictement positive et même minorée par une constante positive sur $\{R^2 - |x|_2^2 \geq 4R\}$. On rappelle également que u est ω -elliptique, donc $L_\omega u(x) = 0$. En combinant cette expression et l'expression de s_i avec les estimées (2.10) et (2.11), on obtient la majoration

$$-\hat{L}_\omega \nu(x) \leq C(\beta) \frac{u(x)}{R^2}$$

où $C(\beta)$ ne dépend que de β .

Ensuite, sur le domaine $\{R^2 - |x|_2^2 < 4R\}$, on a

$$\delta_i^2 \nu(x) \leq 2\eta(x)u(x) \leq \left(\frac{4}{R}\right)^\beta \leq \frac{4^\beta}{R^2}$$

où la première inégalité vient du fait que u et η sont positives.

En conclusion, il existe une constante $C = C(\beta)$ et une fonction g telles que pour tout $x \in B_R$,

$$-\hat{L}_\omega \nu(x) \leq g(x)$$

avec $|g(x)\mathbf{1}_{\{I_\nu(x) \neq \emptyset\}}| \leq \frac{C}{R^2} u(x)$, et $\nu \geq 0$, $\nu_{\partial B_R} = 0$. (Il suffit de poser $g(x) = C(\beta) \frac{u(x)}{R^2}$ si $I_\nu(x) \neq \emptyset$, et $g(x) = -\hat{L}_\omega \nu(x)$ sinon.) On conclut en prenant $\beta = \frac{2d}{p}$ et en appliquant le principe du maximum. $\square$

2.3 Théorèmes limite pour les marches aléatoires en environnements uniformément elliptiques

Le résultat principal de cette section est le principe d'invariance *quenched* pour la marche aléatoire en environnement aléatoire, qui indique qu'une fois interpolée et correctement renormalisée, la marche converge $\mathbb{P}$ -presque sûrement en loi vers un mouvement Brownien, avec une matrice de covariance déterministe.

On commence par établir une loi forte des grands nombres, qui découle du théorème ergodique.

2.3.1 Loi forte des grands nombres

Théorème 2.7 (LFGN). *Soit (X_n) une marche aléatoire en milieu aléatoire centrée, avec $X_0 = 0$, alors*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \mathbf{P}_0 - p.s.$$

Démonstration. Soit $\Delta_n = X_n - X_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et $\Delta_0 = X_0$. Pour $\omega, \omega' \in \Omega$, on définit $\phi(\omega, \omega') = x$ si $\omega' = \theta^x \omega$ (si plusieurs x conviennent, en en choisit un arbitrairement). On a alors

$$\Delta_n = \phi(\theta^{X_{n-1}} \omega, \theta^{X_n} \omega)$$

La suite (X_n) est ergodique pour la transformation τ définie par $X_n \circ \tau = X_{n+1}$, donc également le couple (X_n, X_{n-1}) . Par le théorème ergodique on a donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \rightarrow E_0^\omega(X_0) = 0$ presque sûrement et dans L^1 , soit $\frac{X_n}{n} \rightarrow 0$ $\mathbf{P}_0$ -presque sûrement en prenant l'espérance sous $\mathbb{P}$. $\square$

2.3.2 Théorème central limite *quenched*

La preuve du théorème central limite repose sur l'obtention d'une mesure invariante pour l'environnement vu de la particule $(\bar{\omega}_n)$. On présente deux preuves de ceci, la première est basée sur une périodisation des environnements introduite par Lawler [Law82], la seconde construit des mesures invariantes pour le processus tué à sa sortie d'un domaine. La seconde preuve est inspirée du mémoire [All]. Cependant, la preuve de l'invariance n'y figure pas.

Contrairement à la loi des grands nombres, le théorème central limite est un résultat vrai pour *presque tout* environnement (*quenched*).

La seule différence entre les preuves du théorème central limite et du principe d'invariance (section suivante) est le théorème issu de la théorie des martingales à utiliser. On choisit de détailler les arguments dans le cas du TCL, mais la même démonstration convient pour le principe d'invariance.

Théorème 2.8.

i) Il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur Ω , équivalente à $\mathbb{P}$, invariante et ergodique pour l'environnement vu de la particule.

ii) (TCL *quenched*.) Pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, A)$$

en loi pour P_0^ω , où $A = \text{diag}(a_i, i = 1, \dots, d)$, $a_i = 2\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\omega_0(e_i)) > 0$. C'est-à-dire que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^\omega \left(f \left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right) \leq y \right) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \prod_{i=1}^d \sqrt{a_i}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{f(x) \leq y\}} \exp \left(- \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{2a_i} \right) \prod_{i=1}^d dx_i \quad \mathbb{P} - p.s.$$

On commence par montrer que l'existence d'une telle mesure $\mathbb{Q}$ implique le TCL, grâce au théorème ergodique et au TCL pour les suites de différences de martingale.

Preuve de i) $\Rightarrow$ ii). Supposons qu'il existe une mesure $\mathbb{Q}$ sur Ω , $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, invariante et ergodique pour $(\bar{\omega}_n)$. Alors par le théorème ergodique, pour $i = 1, \dots, d$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_{X_{k-1}}(e_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_{k-1}(0, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g_i(\bar{\omega}_{k-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(g_i) \geq \varepsilon$$

$\mathbb{Q} \otimes P_0^\omega$ -presque sûrement, et donc $\mathbf{P}_0$ -p.s., où $\varepsilon > 0$ est la constante d'uniforme ellipticité, et où $g_i(\omega) = \omega_0(e_i)$.

On peut ensuite vérifier les hypothèses du théorème central limite pour les différences de martingales, pour toutes les projections, ce qui entraîne le théorème central limite *multidimensionnel* (théorème de Cràmer-Wold). Premièrement, soit Δ_n défini comme dans la preuve du théorème 2.7, alors si $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$E_0^\omega[(\Delta_k \cdot t)^2 | \mathcal{G}_{k-1}] = \sum_{i=1}^d E_0^\omega[\Delta_k^2(i) t_i^2 | \mathcal{G}_{k-1}] = \sum_{i=1}^d 2t_i^2 \omega_{X_{k-1}}(e_i)$$

donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0^\omega[(\Delta_k \cdot t)^2 | \mathcal{G}_{k-1}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^d 2t_i^2 a_i > 0$$

en probabilité pour P_0^ω . Ensuite pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} E_0^\omega((\Delta_k \cdot t)^2 \mathbb{1}_{\{|\Delta_k \cdot t| > \epsilon \sqrt{n}\}}) &\leq |t|^2 P_0^\omega(|\Delta_k \cdot t| > \epsilon \sqrt{n}) \\ &\leq \frac{|t|^2}{\epsilon \sqrt{n}} E_0^\omega(|\Delta_k \cdot t|) \\ &\leq \frac{|t|^3}{\epsilon \sqrt{n}} \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E_0^\omega ((\Delta_k \cdot t)^2 \mathbf{1}_{\{|\Delta_k \cdot t| > \epsilon \sqrt{n}\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On conclut alors par le théorème de Cràmer-Wold et le théorème 2.4, l'expression de la variance provenant des mêmes calculs que précédemment avec $t = e_i$. $\square$

Il s'agit maintenant de construire une mesure invariante et ergodique pour l'environnement de la particule, équivalente à $\mathbb{P}$. Pour cela on utilise la méthode introduite par Lawler [Law82], qui consiste à périodiser l'environnement pour obtenir la mesure $\mathbb{Q}$ comme limite de mesures invariantes Q_N sur des sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}^d$, dont l'existence est automatique. Une fois l'existence de la mesure $\mathbb{Q}$ prouvée, il n'est pas difficile de montrer l'invariance (limite de mesures invariantes). En revanche, montrer que $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ requiert des efforts, en particulier l'utilisation du principe du maximum (proposition 2.5), pour obtenir une majoration uniforme *a priori* des densités des Q_N . On suit ici la preuve de [Zei01].

Construction de la mesure invariante $\mathbb{Q}^\omega$. Pour $N \geq 1$, on rappelle que $D_N = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x|_\infty < N\}$ et on note $\bar{D}_N = \{x \in \mathbb{Z}^d : \exists y \in D_N, |x - y|_\infty \leq 1\} = \{-N, \dots, N\}^d$. On note $\mathbb{T}_N = \mathbb{Z}^d / (2N + 1)\mathbb{Z}^d$, et $\pi_N : \mathbb{Z}^d \rightarrow \bar{D}_N$, la composée de la projection canonique sur $\mathbb{T}_N$ et l'application qui à $\mathbf{c}$ dans $\mathbb{T}_N$ associe son unique représentant dans $\bar{D}_N$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit ω^N par $\omega_x^N = \omega_{\pi_N x}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. L'environnement ω_N est une périodisation de ω de période $2N + 1$. On pose $\Omega_N = \{\omega^N, \omega \in \Omega\}$. (De manière équivalente, on aurait pu définir Ω_N comme l'ensemble des environnements ω $(2N + 1)$ -périodiques.) Soit (X_n^N) une marche aléatoire dans l'environnement ω^N , de noyau de transition T_{ω^N} . On pose $\hat{X}_n = \pi_N X_n^N$. $(\hat{X}_n)$ est une chaîne de Markov irréductible (à cause de l'ellipticité), à espace d'états fini $\bar{D}_N$, dont on notera encore T_{ω^N} le noyau de transition. Elle possède donc une unique mesure invariante, absolument continue par rapport à la mesure uniforme sur $\bar{D}_N$,

$$\mu_N^\omega = \frac{1}{(2N + 1)^d} \sum_{x \in \bar{D}_N} \phi_N^\omega(x) \delta_x$$

De la même manière, la suite des environnements $\bar{\omega}_n^N = \theta^{X_n^N} \omega^N$ est une chaîne de Markov irréductible, à espace d'états $S_N := \{\theta^x \omega^N, x \in \bar{D}_N\}$, de noyau de transition M (la périodisation ne change pas le noyau de transition puisque celui-ci dépend de ω uniquement en 0). On peut expliciter sa mesure invariante :

Lemme 2.9. *L'unique mesure invariante de $(\bar{\omega}_n^N)$ sur S_N est donnée par*

$$Q_N^\omega = \frac{1}{(2N + 1)^d} \sum_{x \in \bar{D}_N} \phi_N^\omega(x) \delta_{\theta^x \omega^N}$$

Démonstration. C'est un calcul. Soit $x \in \bar{D}_N$, on a :

$$\begin{aligned}
Q_N^\omega M(\theta^x \omega^N) &= \sum_{y \in \bar{D}_N} Q_N^\omega(\theta^y \omega^N) M(\theta^y \omega^N, \theta^x \omega^N) \\
&= \sum_{y \in \bar{D}_N} \frac{1}{(2N+1)^d} \phi_N^\omega(y) M(\theta^y \omega^N, \theta^x \omega^N) \\
&= \sum_{y \in \bar{D}_N} \frac{1}{(2N+1)^d} \phi_N^\omega(y) \sum_{i=1}^d (\omega_y^N(e_i) \delta_{\theta^{e_i} \theta^y \omega^N = \theta^x \omega^N} + \omega_y^N(-e_i) \delta_{\theta^{-e_i} \theta^y \omega^N = \theta^x \omega^N}) \\
&= \sum_{y \in \bar{D}_N} \frac{1}{(2N+1)^d} \phi_N^\omega(y) T_{\omega^N}(y, x) \\
&= \sum_{y \in \bar{D}_N} \mu_N^\omega(y) T_{\omega^N}(y, x) \\
&= \mu_N^\omega T_{\omega^N}(x) \\
&= \mu_N^\omega(x) \\
&= Q_N^\omega(\theta^x \omega^N)
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que μ_N^ω est invariante pour T_{ω^N} . $\square$

Remarque 2.10. Avec les mêmes notations qu'à la remarque 1.8, on a $Q_N^\omega(f) = \mu_N^\omega(f^\omega)$ pour toute $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Il reste donc à montrer l'existence d'une limite quand $N \rightarrow \infty$. Comme Ω est compact, le théorème de représentation de Riesz-Markov permet d'identifier les formes linéaires positives sur $C(\Omega)$ aux mesures de Radon sur Ω . Les mesures de probabilités sont les mesures $\mu \in C(\Omega)'$ telles que pour toute fonction $f \in C(\Omega)$, $f \geq 0$ implique $\int f d\mu \geq 0$, et $\mu(1) = 1$. Si (μ_n) est une suite de telles mesures convergeant faiblement vers une mesure de Radon μ , alors cette dernière est donc une mesure de probabilité. Par le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité de $C(\Omega)'$ est compacte pour la topologie faible-*, donc de toute suite (μ_n) de mesures on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. On applique ce raisonnement à la suite de mesures $(Q_N^\omega)_{N \geq 1}$ que l'on étend à Ω tout entier par 0, et on note $\mathbb{Q}^\omega$ la limite obtenue.

Montrons que $\mathbb{Q}^\omega$ est invariante pour M . C'est le cas des mesures Q_N^ω , par conséquent pour toute fonction continue f sur Ω ,

$$\int f dQ_N^\omega = \iint f(\omega'') M(\omega', d\omega'') Q_N^\omega(d\omega')$$

La fonction $g(\omega') = \int f(\omega'') M(\omega', d\omega'')$ est continue, donc en passant à la limite faible (pour une sous-suite), on obtient le résultat. $\square$

A présent, il s'agit de montrer que la mesure $\mathbb{Q}^\omega$ obtenue est équivalente à $\mathbb{P}$, et ergodique. Pour cela, la première étape est d'obtenir une majoration uniforme *a priori* sur les ϕ_N^ω . Pour cela, on introduit l'opérateur *résolvante* associé à ω^N , et on démontre certaines propriétés.

Définition 2.11 (Résolvante). Pour $g : \bar{D}_N \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $x \in \bar{D}_N$, on définit le résolvant R_{ω^N} par

$$R_{\omega^N} g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j E_x^{\omega^N} g(\hat{X}_j^N)$$

Remarque 2.12. On peut aussi écrire le résolvant formellement $R_\omega = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) T_\omega \right]^j$. En calculant formellement la somme de cette série géométrique, on obtient $R_\omega = \left(-L_\omega + \frac{1}{N^2} T_\omega\right)^{-1}$.

Sur l'espace des fonctions de $\bar{D}_N$ dans $\mathbb{R}$, on définit le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} f(x)g(x)$. On note $R_{\omega_N}^*$ l'adjoint de la résolvante pour ce produit scalaire, on a alors le lemme suivant :

Lemme 2.13. $R_{\omega_N}^* \phi_N^\omega = N^2 \phi_N^\omega$

Démonstration. Soit $f : \bar{D}_N \rightarrow \mathbb{R}_+$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle R_{\omega_N}^* \phi_N^\omega, f \rangle &= \langle \phi_N^\omega, R_{\omega_N} f \rangle \\
&= \frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} \phi_N^\omega(x) \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j T_{\omega_N}^j f(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \sum_{x \in \bar{D}_N} \frac{\phi_N^\omega(x)}{|\bar{D}_N|} T_{\omega_N}^j f(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \sum_{x \in \bar{D}_N} \mu_N^\omega(x) T_{\omega_N}^j f(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \sum_{x \in \bar{D}_N} \sum_{x_1, \dots, x_j \in \bar{D}_N} \mu_N^\omega(x) T_{\omega_N}(x, x_1) T_{\omega_N}(x_1, x_2) \dots T_{\omega_N}(x_{j-1}, x_j) f(x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \sum_{x \in \bar{D}_N} \mu_N^\omega(x) f(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \langle \phi_N^\omega, f \rangle \\
&= N^2 \langle \phi_N^\omega, f \rangle
\end{aligned}$$

□

Grâce au lemme et à la remarque suivante, on va pouvoir exprimer la norme de ϕ_N^ω dans un certain espace en fonction du résolvant. Pour $p > 0$ et $f : \bar{D}_N \rightarrow \mathbb{R}$ on définit la norme $\|f\|_{L^p(\bar{D}_N)}^p = \frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} |f(x)|^p$. Et on note p' l'exposant conjugué de p , c'est-à-dire $p' = p/(p-1)$.

Remarque 2.14. Soient f, g deux fonctions sur $\bar{D}_N$. Par l'inégalité de Hölder on a

$$\frac{\|fg\|_{L^1(\bar{D}_N)}}{\|g\|_{L^{p'}(\bar{D}_N)}} \leq \|f\|_{L^p(\bar{D}_N)}$$

Alors,

$$\sup_{g \geq 0, \|g\|_{L^{p'}(\bar{D}_N)} \leq 1} \|fg\|_{L^1(\bar{D}_N)} = \sup_{g \geq 0, g \in L^{p'}(\bar{D}_N)} \frac{\|fg\|_{L^1(\bar{D}_N)}}{\|g\|_{L^{p'}(\bar{D}_N)}} \leq \|f\|_{L^p(\bar{D}_N)}$$

Mais la fonction positive $g = \frac{1}{\|f\|_{L^{p'}(\bar{D}_N)}^{p/p'}} |f|^{p/p'}$ réalise l'égalité, donc

$$\|f\|_{L^p(\bar{D}_N)} = \sup_{g \geq 0, \|g\|_{L^{p'}(\bar{D}_N)} \leq 1} \|fg\|_{L^1(\bar{D}_N)}$$

En appliquant la remarque à $\phi_N^\omega \in L^{d'}(\bar{D}_N)$, on obtient

$$\|\phi_N^\omega\|_{L^{d'}(\bar{D}_N)} = \sup_{g \geq 0, \|g\|_{L^d(\bar{D}_N)} \leq 1} \|\phi_N^\omega g\|_{L^1(\bar{D}_N)} = \sup_{g \geq 0, \|g\|_{L^d(\bar{D}_N)} \leq 1} \langle \phi_N^\omega, g \rangle$$

Puis grâce au lemme 2.13,

$$\|\phi_N^\omega\|_{L^{d'}(\bar{D}_N)} = \frac{1}{N^2} \sup_{g \geq 0, \|g\|_{L^d(\bar{D}_N)} \leq 1} \langle \phi_N^\omega, R_{\omega_N} g \rangle \quad (2.12)$$

La dernière étape pour obtenir une borne sur les $\|\phi_N^\omega\|_{L^{d'}(\bar{D}_N)}$ est d'appliquer le principe du maximum au résolvant de g , il faut donc pour cela vérifier que $R_{\omega^N}g$ est une sur- ou sous-solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur L_{ω^N} . C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.15. *Pour tout $x \in \bar{D}_N$, on a $-L_{\omega^N}(R_{\omega^N}g)(x) \leq 2g(x)$.*

Démonstration. C'est un calcul direct. On utilise le théorème de Fubini-Tonelli et la propriété de Markov à la 3ème égalité. Pour plus de lisibilité, on omet les parenthèses des espérances quand il n'y a pas d'ambiguïté.

$$\begin{aligned}
L_{\omega^N}(R_{\omega^N}g)(x) &= E_x^{\omega^N} R_{\omega^N}g(\hat{X}_1^N) - R_{\omega^N}g(x) \\
&= E_x^{\omega^N} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j E_{X_1^N}^{\omega^N} g(\hat{X}_j^N) - \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j E_x^{\omega^N} g(\hat{X}_j^N) \\
&= E_x^{\omega^N} E_x^{\omega^N} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j g(\hat{X}_{j+1}^N) \mid \mathcal{G}_1 \right] - E_x^{\omega^N} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j g(\hat{X}_j^N) \\
&= E_x^{\omega^N} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^{j-1} g(\hat{X}_j^N) - \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j g(\hat{X}_j^N) \right) \\
&= E_x^{\omega^N} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^{j-1} - \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \right) g(\hat{X}_j^N) - g(x) \\
&= E_x^{\omega^N} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j \left(\frac{1}{1 - 1/N^2} - 1 \right) g(\hat{X}_j^N) - g(x) \\
&= \left(\frac{N^2}{N^2 - 1} - 1 \right) E_x^{\omega^N} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)^j g(\hat{X}_j^N) - \left(\frac{N^2}{N^2 - 1} - 1 \right) g(x) - g(x) \\
&= \frac{1}{N^2 - 1} R_{\omega^N}g(x) - \frac{N^2}{N^2 - 1} g(x) \\
&\geq -2g(x)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant due au fait que g est positive. □

En appliquant le principe du maximum (théorème 2.5) sur $\bar{D}_N$, avec $u = R_{\omega^N}g$ et $f = 2g$, on obtient

$$\max_{\bar{D}_N} R_{\omega^N}g \leq 2C \text{diam}(\bar{D}_N) |\bar{D}_N|^{1/d} \|g\|_{L^d(\bar{D}_N)} \leq C' N^2 \|g\|_{L^d(\bar{D}_N)}$$

Notons que les hypothèses du théorème sont bien vérifiées, en particulier on prolonge $R_{\omega^N}g$ par 0 sur le bord de $\bar{D}_N$. Enfin, en injectant cette majoration dans la formule (2.12), et en notant que $\frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} \phi_N^\omega(x) = 1$, on obtient

$$\|\phi_N^\omega\|_{L^{d'}(\bar{D}_N)} \leq C' \tag{2.13}$$

On va maintenant se servir de l'estimée (2.13) pour montrer que $\mathbb{Q}^\omega$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. On verra ensuite que l'inverse est vrai aussi, et on terminera la preuve en montrant l'ergodicité de $\mathbb{Q}^\omega$ pour l'environnement vu de la particule.

Preuve de $\mathbb{Q}^\omega \sim \mathbb{P}$. On note P_N la mesure uniforme sur S_N "en comptant les répétitions", ie $P_N = \frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} \delta_{\theta_x \omega^N}$.

Lemme 2.16. *Soit $g \in C(\Omega)$. Alors*

$$\left| \int_{\Omega} g dQ_N^\omega \right| \leq C' \left(\int_{\Omega} g^d dP_N \right)^{1/d}$$

Démonstration. Soit $g \in C(\Omega)$. On rappelle que les mesures Q_N^ω et P_N sont étendues par 0 à Ω tout entier. De même on étend la mesure μ_N^ω à $\mathbb{Z}^d$. On obtient en utilisant l'inégalité de Hölder et l'estimée (2.13), ainsi que la remarque 2.10 :

$$\int_{\Omega} g dQ_N^\omega = \int_{\mathbb{Z}^d} g^\omega d\mu_N^\omega \leq \|\phi_N^\omega\|_{L^{d'}(\bar{D}_N)} \left(\int_{\bar{D}_N} (g^\omega)^d dx \right)^{1/d} \leq C' \left(\int_{\Omega} g^d dP_N \right)^{1/d}$$

ce qui prouve le lemme. $\square$

Par le théorème ergodique, $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\int_{\Omega} g^d dP_N = \frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} g(\theta^x \omega^N) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g^d d\mathbb{P}$$

Puis en prenant la limite quand $N \rightarrow \infty$ le long d'une sous-suite dans le lemme, on a par convergence faible,

$$\left| \int_{\Omega} g dQ^\omega \right| \leq C' \left(\int_{\Omega} g^d d\mathbb{P} \right)^{1/d} \quad (2.14)$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$. On veut montrer que $Q^\omega(A) = 0$. La mesure Q^ω est une mesure de Radon, donc régulière intérieurement, ce qui entraîne qu'il suffit de montrer que $Q^\omega(F) = 0$ pour tout $F \subset A$ fermé. Soit F un tel sous-ensemble. Pour $\delta > 0$ on définit $g_F^\delta = \left(1 - \frac{d(\cdot, F)}{\delta}\right)^+$, où $d(\cdot, F)$ est la distance au fermé F dans Ω . La fonction g_F^δ est continue à support contenu dans $F_\delta := \{\omega \in \Omega : d(\omega, F) < \delta\}$. De plus, on a $\mathbf{1}_F \leq g_F^\delta \leq \mathbf{1}_{F_\delta}$. Ainsi grâce à (2.14),

$$Q^\omega(F) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_F dQ^\omega \leq \int_{\Omega} g_F^\delta dQ^\omega \leq C' \left(\int_{\Omega} (g_F^\delta)^d d\mathbb{P} \right)^{1/d} \leq C' \mathbb{P}(F_\delta)^{1/d}$$

La famille $(F_\delta)_{\delta > 0}$ est croissante pour l'inclusion, donc en prenant la limite $\delta \rightarrow 0$ on obtient

$$Q^\omega(F) \leq C' \mathbb{P}(F)^{1/d} \leq C' \mathbb{P}(A)^{1/d} = 0$$

Ce qui montre que $Q^\omega \ll \mathbb{P}$.

On veut maintenant montrer que $\mathbb{P} \ll Q^\omega$. Comme l'inverse est vrai, en notant $E := \{\omega \in \Omega : (dQ^\omega/d\mathbb{P})(\omega) = 0\}$, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(E) = 0$. Premièrement par M -invariance de Q^ω ,

$$E_{Q^\omega}(M\mathbf{1}_E) = E_{Q^\omega}(\mathbf{1}_E) = Q^\omega(E) = 0$$

et donc $M\mathbf{1}_E = 0$ Q^ω -p.s. Ainsi,

$$\mathbb{E}((M\mathbf{1}_E)\mathbf{1}_{E^c}) = E_{Q^\omega} \left((M\mathbf{1}_E) \frac{d\mathbb{P}}{dQ^\omega} \mathbf{1}_{E^c} \right) = 0$$

(On rappelle que $\mathbb{E}$ désigne l'espérance pour la loi $\mathbb{P}$.) Donc pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in E^c$, $M\mathbf{1}_E(\omega) = 0 = \mathbf{1}_E(\omega)$. Pour $\omega \in E$, $M\mathbf{1}_E(\omega) = M(\omega, E) \leq 1 = \mathbf{1}_E(\omega)$. Finalement pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$, $M\mathbf{1}_E \leq \mathbf{1}_E$. Ainsi pour $i = 1, \dots, d$, $\mathbb{P}$ -presque sûrement,

$$\mathbf{1}_E(\omega) \geq \sum_{i=1}^d (\omega_0(e_i) \mathbf{1}_E(\theta_{e_i} \omega) + \omega_0(-e_i) \mathbf{1}_E(\theta_{-e_i} \omega)) \geq \varepsilon \mathbf{1}_E(\theta_{\pm e_i} \omega)$$

avec $\varepsilon > 0$ la constante d'uniforme ellipticité. Donc $\mathbf{1}_E \geq \mathbf{1}_E \circ \theta^{\pm e_i}$, et donc $\theta^{\pm e_i} E \subset E$. Par invariance par translation de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(E \subset \theta^{e_i} E) = \mathbb{P}(\theta^{-e_i} E \subset E) = 1$, et de même avec θ^{-e_i} , donc $\theta^{\pm e_i} E = E$ $\mathbb{P}$ -presque sûrement, c'est-à-dire que E est invariant par translation, mais seulement $\mathbb{P}$ -p.s. Pour utiliser l'ergodicité de $\mathbb{P}$, notons simplement $A = \bigcap_{x \in \mathbb{Z}^d} \theta^{-x} E$. A est alors invariant par translation ("sûrement"), et $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E)$, donc par ergodicité $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$. Comme $Q^\omega \ll \mathbb{P}$ et $Q^\omega(E) = 0$, on conclut que $\mathbb{P}(E) = 0$, ce qui termine la preuve. $\square$

Il reste seulement à montrer l'ergodicité de la mesure $\mathbb{Q}^\omega$ par rapport à l'environnement vu de la particule, ce qui peut se formuler comme ceci :

$$\forall A \in \mathcal{F} (\forall \omega' \in A M(\omega', A^c) = 0) \Rightarrow \mathbb{Q}^\omega(A) \in \{0, 1\} \quad (2.15)$$

Preuve de l'ergodicité. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $M(\omega, A^c) = 0$ pour tout $\omega \in A$. On considère l'évènement $F = \{\theta^{e_i} A \not\subset A\}$. Soit $\omega^0 \in F$ et $\omega^1 = \theta^{-e_i} \omega^0 \in A$. Comme $\omega^0 \in F$, $\omega^0 \notin A$, donc $M(\omega^1, \omega^0) = 0$. Or, par ellipticité, $M(\omega^1, \omega^0) > 0$, et donc on conclut que $\mathbb{P}(F) = 0$, puis par invariance par translation, que $\mathbb{P}(\forall x \in \mathbb{Z}^d \theta^x A = A) = 1$. Puis, comme $\mathbb{Q}^\omega \ll \mathbb{P}$, $\mathbb{Q}^\omega(\forall x \in \mathbb{Z}^d \theta^x A = A) = 1$, et comme $\mathbb{Q}^\omega$ est invariante par translation (car c'est vrai pour $\mathbb{P}$), $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}(\bigcap_{x \in \mathbb{Z}^d} \theta^x A) \in \{0, 1\}$, ce qui montre (2.15). $\square$

Remarque 2.17 (Unicité). *En fait, la mesure $\mathbb{Q}^\omega$ est unique et ne dépend pas de ω . En effet si $\mathbb{Q}^{\omega'}$ est la mesure issue de la preuve pour un environnement ω' , alors $\mathbb{Q}^{\omega'}$ est M -ergodique, et $\mathbb{Q}^\omega \sim \mathbb{Q}^{\omega'}$, donc $\mathbb{Q}^\omega = \mathbb{Q}^{\omega'}$. On notera $\mathbb{Q}$ cette unique mesure invariante. Ainsi la seule valeur d'adhérence de la suite $(\mathbb{Q}_N^\omega)$ est $\mathbb{Q}$, et donc $\mathbb{Q}_N^\omega \rightarrow \mathbb{Q}$ faiblement sans avoir à extraire.*

Seconde construction de la mesure invariante. On définit les temps d'arrêt $T_N := \inf\{n > 0 : |X_n|_\infty > N\}$, puis les mesures

$$\tilde{\mathbb{Q}}_N^\omega = \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} E_0^\omega \left(\sum_{j=0}^{T_N-1} \delta_{\theta^{x_j} \omega} \right)$$

La mesure $\tilde{\mathbb{Q}}_N^\omega$ est supportée par $\bar{D}_N$. Par les mêmes arguments que précédemment, on peut étendre les mesures $\tilde{\mathbb{Q}}_N^\omega$ à Ω , et extraire une sous-suite convergente (faiblement). On note $\tilde{\mathbb{Q}}^\omega$ la limite. On va montrer que cette limite est M -invariante, et absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$. Le reste de la preuve est strictement le même que précédemment. La remarque 2.17 entraînera d'ailleurs $\tilde{\mathbb{Q}}^\omega = \mathbb{Q}$.

Preuve de l'invariance. On peut écrire pour tout $x \in \bar{D}_N$,

$$\tilde{\mathbb{Q}}_N^\omega(\theta^x \omega) = \frac{E_0^\omega(\# \text{ visites de } \theta^x \omega \text{ avant } T_N)}{E_0^\omega(T_N)}$$

La fonction $g(x) = E_0^\omega(\# \text{ visites de } \theta^x \omega \text{ avant } T_N)$ vérifie pour tout $x \in D_N \setminus \{0\}$

$$g(x) = \sum_{i=1}^d (P_{x-e_i}^\omega(\bar{\omega}_1 = \theta^x \omega) g(x - e_i) + P_{x+e_i}^\omega(\bar{\omega}_1 = \theta^x \omega) g(x + e_i)) \quad (2.16)$$

Par ailleurs, g s'annule sur le bord de $\bar{D}_N$, et on a

$$g(0) = 1 + \sum_{i=1}^d (P_{-e_i}^\omega(\bar{\omega}_1 = \omega) g(-e_i) + P_{e_i}^\omega(\bar{\omega}_1 = \omega) g(e_i))$$

Enfin,

$$P_{x \pm e_i}^\omega(\bar{\omega}_1 = \theta^x \omega) = \sum_{y \in \bar{D}_N} \omega_y(\pm e_i) \delta_{\theta^{y \pm e_i} \omega = \theta^x \omega}$$

En combinant ces égalités, on obtient pour $x \in D_N$,

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_N^\omega M(\theta^x \omega) &= \sum_{y \in \bar{D}_N} \tilde{Q}_N^\omega(\theta^y \omega) M(\theta^y \omega, \theta^x \omega) \\
&= \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} \sum_{y \in \bar{D}_N} g(y) \sum_{i=1}^d (\omega_y(e_i) \delta_{\theta^y + e_i \omega = \theta^x \omega} + \omega_y(-e_i) \delta_{\theta^y - e_i \omega = \theta^x \omega}) \\
&= \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} \sum_{i=1}^d \left(g(x - e_i) \sum_{y \in \bar{D}_N} \omega_y(e_i) \delta_{\theta^y + e_i \omega = \theta^x \omega} + g(x + e_i) \sum_{y \in \bar{D}_N} \omega_y(-e_i) \delta_{\theta^y - e_i \omega = \theta^x \omega} \right) \\
&= \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} (g(x) \mathbf{1}_{x \neq 0} + (g(x) - 1) \mathbf{1}_{x=0}) \\
&= \tilde{Q}_N^\omega(\theta^x \omega) - \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} \delta_0(x)
\end{aligned}$$

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, l'égalité précédente implique

$$\int_{\Omega} f(\omega') \tilde{Q}_N^\omega M(d\omega') = \int_{\Omega} f(\omega') \tilde{Q}_N^\omega(d\omega') - \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} f(\omega)$$

Puis en prenant la limite faible $N \rightarrow \infty$, comme $E_0^\omega(T_N) \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{\Omega} f(\omega') \tilde{Q}^\omega M(d\omega') = \int_{\Omega} f(\omega') \tilde{Q}^\omega(d\omega')$$

ce qui prouve l'invariance de la mesure $\tilde{Q}^\omega$.

□

La proposition suivante entraîne en particulier que $\tilde{Q}^\omega \ll \mathbb{P}$.

Proposition 2.18. *Il existe $C = C(\varepsilon)$ telle que pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\tilde{Q}^\omega(A) \leq C \mathbb{P}(A)^{1/d}$.*

Démonstration. On partitionne S_N en K différents éléments $\{\omega^{N,\alpha}\}_{1 \leq \alpha \leq K}$, et on note $C_N(\alpha) = \{x \in \bar{D}_N : \theta^x \omega^N = \omega^{N,\alpha}\}$. On peut alors écrire

$$P_N = \frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{\alpha=1}^K |C_N(\alpha)| \delta_{\omega^{N,\alpha}}$$

et

$$\tilde{Q}_N^\omega(\omega^{N,\alpha}) = \frac{1}{E_0^\omega(T_N)} E_0^\omega \left(\sum_{j=0}^{T_N-1} \sum_{i=1}^{|C_N(\alpha)|} \mathbf{1}_{\{X_j = x_\alpha(i)\}} \right)$$

On note de plus $C_N(\alpha) = \{x_\alpha(1), \dots, x_\alpha(|C_N(\alpha)|)\}$ pour $\alpha = 1, \dots, K$. Ainsi, en posant $g_\alpha(y) = \sum_{i=1}^{|C_N(\alpha)|} \mathbf{1}_{\{y = x_\alpha(i)\}}$ et $u_\alpha(x) = E_x^\omega \left(\sum_{j=0}^{T_N-1} g_\alpha(X_j) \right)$, on obtient

$$\frac{\tilde{Q}_N^\omega(\omega^{N,\alpha})}{P_N(\omega^{N,\alpha})} = \frac{|\bar{D}_N|^{1/d}}{|C_N(\alpha)|^{1/d} E_0^\omega(T_N)} u_\alpha(0) \quad (2.17)$$

Par ailleurs, $u_\alpha \geq 0$ sur $\bar{D}_N \cup \partial \bar{D}_N$, $u_\alpha = 0$ sur $\partial \bar{D}_N$ et u_α est ω -harmonique sur $\bar{D}_N$ car c'est une fonction de Green. Donc, $-L_\omega u_\alpha \leq g_\alpha$ sur $\bar{D}_N$, et on peut appliquer le principe du maximum pour obtenir

$$\max_{\bar{D}_N} u_\alpha(x) \leq C \text{diam}(\bar{D}_N) |\bar{D}_N|^{1/d} \|g_\alpha\|_{L^d(\bar{D}_N)} \leq C N^2 \left(\frac{1}{|\bar{D}_N|} \sum_{x \in \bar{D}_N} |g_\alpha(x)|^d \right)^{1/d}$$

Or, $g_\alpha(x) \in \{0, 1\}$, donc $|g_\alpha(x)|^d = g_\alpha(x)$, et $\sum_{x \in \bar{D}_N} g_\alpha(x) = |C_N(\alpha)|$, par conséquent :

$$\max_{\bar{D}_N} u_\alpha(x) \leq CN^2 \frac{|C_N(\alpha)|^{1/d}}{|\bar{D}_N(\alpha)|^{1/d}}$$

D'où, par (2.17),

$$\frac{\tilde{Q}_N^\omega(\omega^{N,\alpha})}{P_N(\omega^{N,\alpha})} \leq C \frac{N^2}{E_0^\omega(T_N)}$$

Et il reste à montrer que $E_0^\omega(T_N) \geq N^2$. On utilise un argument de martingale. Soit $M_n = |X_n|^2 - n$, c'est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)$ car

$$E_0^\omega[M_{n+1} - M_n | \mathcal{G}_n] = E_{X_n}^\omega(|X_{n+1}|^2 - |X_n|^2 - 1) = \sum_{i=1}^d \omega_{X_n}(e_i)(2X_n \cdot e_i - 2X_n \cdot e_i) = 0$$

Par le théorème d'arrêt, $(M_{n \wedge T_N})$ est une martingale et $E_0^\omega(M_{n \wedge T_N}) = E_0^\omega(M_0) = 0$. Donc $E_0^\omega(|X_n \wedge T_N|^2) = E_0^\omega(n \wedge T_N)$. De plus, par convergence monotone, $E_0^\omega(n \wedge T_N) \rightarrow E_0^\omega(T_N)$ quand $n \rightarrow \infty$ et par convergence dominée, comme $|X_{n \wedge T_N}|^2 \leq dN^2$, $E_0^\omega(|X_{n \wedge T_N}|^2) \rightarrow E_0^\omega(|X_{T_N}|^2) \geq N^2$. Ainsi, $E_0^\omega(T_N) \geq N^2$, ce qui termine la preuve. $\square$

2.3.3 Principe d'invariance

On note $\tilde{X}_t = X_{[t]} + (t - [t])(X_{[t+1]} - X_{[t]})$ l'interpolation affine de la marche. Par le théorème 2.3 et la preuve du théorème central limite à la section précédente, on a alors le résultat suivant :

Théorème 2.19 (Principe d'invariance *quenched*). *Pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$,*

$$\left(\frac{\tilde{X}_{nt}}{\sqrt{n}} \right)_{t \geq 0} \rightharpoonup B^A$$

en loi quand $n \rightarrow \infty$, où B^A est un mouvement Brownien de matrice de covariance A (avec les même notations qu'à la section précédente).

Une application du principe d'invariance. On note temporairement B la boule centrée de rayon 1 pour la norme $|\cdot|_\infty$ dans $\mathbb{R}^d$, et on numérote $F_1, F_2, \dots$ ses faces *ouvertes*, ie sans les arêtes. Pour $n \geq 1$, on considère les problèmes aux différences finies suivants (de type Dirichlet) :

$$\begin{cases} L_\omega f(x) = 0 & \text{dans } nB \\ f(x) = 1 & \text{sur } nF_1 \\ f(x) = 0 & \text{sur les autres faces} \end{cases} \quad (2.18)$$

Une solution de ce problème est donnée par la fonction de Green

$$f(x) = P_x^\omega((X_n) \text{ sort de } nB \text{ par } nF_1) = P_x^\omega((\tilde{X}_{nt}/\sqrt{n})_{t \in [0,1]} \text{ sort de } B \text{ par } F_1)$$

Par le principe d'invariance, le processus $(\tilde{X}_{nt}/\sqrt{n})_{t \in [0,1]}$ arrêté à sa sortie de B converge en loi vers le mouvement Brownien (B^A) arrêté à sa sortie de B . Considérons Γ le sous-ensemble de $C([0,1], \mathbb{R}^d)$ formé des courbes reliant 0 à F_1 . Γ est mesurable et sa frontière est l'ensemble des courbes reliant 0 à la frontière de F_1 , de mesure de Lebesgue nulle, et donc également négligeable pour la mesure Brownienne limite. Ainsi, on a la convergence¹

$$P_0^\omega((\tilde{X}_{nt}/\sqrt{n})_{t \in [0,1]} \text{ sort de } B \text{ par } F_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0^\omega(B^A \text{ sort de } B \text{ par } F_1)$$

Or la fonction

$$g(x) = P_x^\omega(B^A \text{ sort de } B \text{ par } F_1)$$

1. Si μ_n est une suite de probabilités convergeant faiblement vers μ , et si E est un borélien tel que $\mu(\partial E) = 0$, alors $\mu_n(E) \rightarrow \mu(E)$.

est solution du problème d'EDP

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^d a_i^2 \partial_{ii}^2 g(x) = 0 & \text{dans } B \\ g(x) = 1 & \text{sur } F_1 \\ g(x) = 0 & \text{sur les autres faces} \end{cases} \quad (2.19)$$

En particulier l'opérateur différentiel $\sum a_i^2 \partial_{ii}^2$ ne dépend pas de ω . Intuitivement, cela signifie qu'à grande échelle, la solution du problème discret n'est plus affectée par les irrégularités du milieu, c'est un phénomène d'homogénéisation. Bien sûr, on montre ici la convergence ponctuelle seulement en 0 mais on pourrait généraliser à tout $x \in B$. On pourrait également étendre le raisonnement à d'autres équations (comme l'équation de la chaleur, par exemple).

3 Récurrence et transience

Dans cette section, on démontre des résultats de récurrence en dimension ≤ 2 et transience en dimension ≥ 3 de la marche aléatoire, pour presque tout environnement. On construit également des contre-exemples (environnement pour lesquels la marche est transiente en dim. 2 ou récurrente en dim. 3).

3.1 Rappel des théorèmes utilisés

On rappelle ici deux théorèmes dûs à Kingman qui concernent les processus sous-additifs, utilisés dans la preuve de la récurrence de la marche en dimension ≤ 2 .

Théorème 3.1 (Théorème ergodique sous-additif de Kingman [Der80]). *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et τ une transformation préservant la mesure et ergodique. Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, vérifiant $X_{n+m} \leq X_n + X_m \circ \tau^n$. Alors,*

$$X_n/n \rightarrow a$$

presque sûrement et dans L^1 , où a est une constante.

Théorème 3.2 (Décomposition des suites sous-additives [Der80]). *Sous les mêmes hypothèses, il existe $Y \in L^1$ tel que pour tout n , $\sum_{i=0}^{n-1} Y \circ \tau^i \leq X_n$ et $\mathbb{E}Y = a$. On a alors $\lim X_n/n = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y \circ \tau^i$. De plus, on peut prendre pour Y toute valeur d'adhérence pour la topologie faible L^1 de la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{n+1} - X_n \circ \tau)$, et une telle valeur d'adhérence existe.*

3.2 Récurrence pour $d \leq 2$

On montre que la marche est récurrente pour presque tout environnement en dimension 2. La preuve figure dans [Zei01] et a été imaginée par Kesten. Elle utilise le théorème ergodique sous-additif de Kingman (théorème 3.1).

On fixe pour le moment un environnement $\omega \in \Omega$, et on équipe Ω de la mesure $\mathbb{Q}^\omega = \mathbb{Q}$ issue de la preuve du théorème central limite (2.8). Soit (X_n) la marche dans l'environnement ω , et soit (R_n) son trajet (*range*) jusqu'au temps n , ie $R_n = \#\{x \in \mathbb{Z}^d : \exists i \leq n, X_i = x\}$. Alors R_n est intégrable, et la suite (R_n) est sous-additive (au sens de Kingman), en effet

$$R_{n+m} = R_n + \sum_{i=1}^{R_m \circ \tau^n} \mathbb{1}_{\{X_{n+i} \notin \{X_1, \dots, X_n\}\}} \leq R_n + R_m \circ \tau^n$$

Où τ est l'opérateur de "décalage" $X_n \circ \tau = X_{n+1}$. Le théorème 3.1 entraîne alors que $R_n/n \rightarrow a$ $\mathbb{Q}$ -presque sûrement et dans L^1 , où $a = \lim \mathbb{E}^\omega \times E_0^\omega(R_n/n)$ est constante.

On souhaite calculer a . Par le théorème de décomposition des suites sous-additives (3.2), il existe $Y \in L^1$ tel que pour tout n , $\sum_{i=0}^{n-1} Y \circ \tau^i \leq R_n$ et $\mathbb{E}^\omega \times E_0^\omega(Y) = a$. De plus, toute valeur d'adhérence pour la topologie faible L^1 de la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (R_{n+1} - R_n \circ \tau)$ convient, et $\lim R_n/n = \lim \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y \circ \tau^i$. Or, $R_{n+1} - R_n \circ \tau = \mathbb{1}_{\{X_0 \notin \{X_1, \dots, X_n\}\}} \rightarrow \mathbb{1}_A \circ \tau$ presque sûrement et dans L^1 , où $A = \{X_i \neq 0 \forall i \geq 0\}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n/n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_A \circ \tau^i = \mathbb{Q} \times P_0^\omega(A)$$

où on a utilisé le théorème ergodique de Birkhoff (théorème 2.2) et où la convergence a lieu $\mathbb{Q}$ -presque sûrement.

Pour tout $n \geq 1$, et tout $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} P_0^\omega(R_n/n < \delta) &\geq P_0^\omega(\forall 1 \leq i \leq n, X_i \in B_{\sqrt{\delta n}}) \\ &\geq P_0^\omega(\forall t \in [0, 1], |\tilde{X}_{nt}/\sqrt{n}| < \sqrt{\delta}) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $C([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ formé des trajectoires γ telles que $|\gamma(t)| < \sqrt{\delta}$ pour tout $t \in [0, 1]$, et on note $\gamma_n(t) = \tilde{X}_{nt}/\sqrt{n}$. L'inégalité ci-dessus se réécrit alors

$$P_0^\omega(R_n/n < \delta) \geq P_0^\omega(\gamma_n \in \mathcal{E})$$

Or, $\mathcal{E}$ est un ouvert, de frontière $\partial\mathcal{E} = \{\gamma \in C([0, 1]; \mathbb{R}^d) : \exists t \in [0, 1] \mid |\gamma(t)| = \sqrt{\delta}\}$ qui est de mesure nulle pour la mesure Brownienne limite (provenant du principe d'invariance). On a donc la convergence ²

$$P_0^\omega(\gamma_n \in \mathcal{E}) \rightarrow P_0^\omega(B^A \in \mathcal{E})$$

La dernière probabilité étant strictement positive, et ainsi on obtient

$$\liminf P_0^\omega(R_n/n < \delta) > 0$$

Ainsi $P_0^\omega(A) < \delta$ $\mathbb{Q}$ -presque sûrement.

Les mesures $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ sont mutuellement absolument continues donc le résultat est vrai $\mathbb{P}$ -p.s., ce qui conclut la preuve.

3.3 Transience pour $d \geq 3$

On utilise ici l'inégalité de la moyenne pour les fonctions ω -harmoniques (proposition 2.6) pour prouver que la marche aléatoire en dimension $d \geq 3$ est transiente pour presque tout environnement ω . On commence par un lemme donnant une borne uniforme en ω sur les probabilités de "confinement" dans une boule en temps long par rapport au rayon...

On rappelle que Ω_0 désigne l'ensemble (de mesure pleine) des évènements équilibrés et uniformément elliptiques.

Preuve de la transience.

Lemme 3.3. *Il existe $C = C(d)$ tel que pour tout L grand, et tout $\gamma \geq 0$,*

$$\sup_{\omega \in \Omega_0} P_0^\omega(|X_n| < L, n = 1, \dots, L^{\gamma+2}) \leq e^{-CL^\gamma}$$

Démonstration. On se ramène au cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. En effet considérons $S_n = \sum_{i=1}^d X_n(i)$. Alors (S_n) est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, indépendante de ω . De plus,

$$|S_n| \leq |X_n|_1 \leq |X_n|$$

Et,

$$P_0^\omega(|S_n| < L, n = 1, \dots, L^{\gamma+2}) \leq e^{-CL^\gamma}$$

En effet, par le principe d'invariance de Donsker (convergence de la marche vers le mouvement Brownien), il existe une constante $C_1 \in]0, 1[$ telle que pour tout n , et toute constante $C_2 > 0$,

$$P_0^\omega(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| < C_2 \sqrt{n}) \leq C_1$$

On découpe l'intervalle $[0, L^{\gamma+2}]$ en L^γ intervalles de longueur L^2 , notés $A_1, \dots, A_{L^\gamma}$. On a alors

$$\begin{aligned} P_0^\omega(|S_n| < L, n = 1, \dots, L^{\gamma+2}) &= \prod_{k=1}^{L^\gamma} P_0^\omega(|S_n| < L, n \in A_k \mid |S_n| < L, n \in A_1 \cup \dots \cup A_{k-1}) \\ &\leq P_0^\omega(|S_n| < 2L, n = 1, \dots, L^2)^{L^\gamma} \\ &\leq C_1^{L^\gamma} \\ &= e^{-CL^\gamma} \end{aligned}$$

avec $C = -\log C_1 > 0$. Le lemme suit, en se rappelant que (S_n) est indépendante de $\omega \in \Omega_0$. □

2. C'est le même lemme qu'à la fin de la section 2.

Soit maintenant K grand. On définit les temps d'atteinte $\tau_0 = 1$, puis $\tau_i = \inf\{n > \tau_{i-1} : X_n \notin B_{K^i}\}$, où $B_i = B_{|\cdot|}(0, K^i)$. En appliquant le lemme avec $L = K^i$, on obtient

$$\sup_{\omega \in \Omega_0} P_0^\omega(|X_n| < K^i, n = 1, \dots, K^{i(\gamma+2)}) \leq e^{-CK^{i\gamma}}$$

Donc pour tout $\omega \in \Omega_0$,

$$P_0^\omega(\tau_i > K^{i(\gamma+2)}) \leq e^{-CK^{i\gamma}} \quad (3.1)$$

Lemme 3.4. *On a la majoration*

$$E_0^\omega(\tau_{i+2}) \leq C' K^{2(i+2)} \quad (3.2)$$

avec $C' = C'(d)$ une nouvelle constante indépendante de i, K, γ .

Démonstration. On a

$$E_0^\omega(\tau_{i+2}) = \underbrace{\int_0^{K^{2(i+2)}} P_0^\omega(\tau_{i+2} > t) dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{K^{2(i+2)}}^{+\infty} P_0^\omega(\tau_{i+2} > t) dt}_{(2)} \quad (3.3)$$

L'intégrale (1) est majorée par $K^{2(i+2)}$. On va majorer l'intégrale (2). On fait le changement de variable $t = K^{(i+2)(\gamma+2)} = K^{2(i+2)} e^{\gamma \log K^{i+2}}$, on a donc $dt = K^{2(i+2)} \log(K^{i+2}) e^{\gamma \log K^{i+2}} d\gamma$. On obtient

$$(2) = K^{2(i+2)} \log(K^{i+2}) \int_0^{+\infty} P_0^\omega(\tau_{i+2} > K^{(i+2)(\gamma+2)}) e^{\gamma \log K^{i+2}} d\gamma$$

Puis grâce à (3.1),

$$(2) \leq K^{2(i+2)} \log(K^{i+2}) \int_0^{+\infty} e^{-CK^{(i+2)\gamma}} K^{(i+2)\gamma} d\gamma$$

On fait un nouveau changement de variable $s = K^{\gamma(i+2)}$, on a donc $\gamma = \log(tK^{-(i+2)})/\log(K^{i+2})$ et $d\gamma = dt/(t \log(K^{i+2}))$, ce qui donne

$$(2) \leq K^{2(i+2)} \log(K^{i+2}) \int_1^{+\infty} t e^{-Ct} \frac{dt}{t \log(K^{i+2})} = \frac{e^{-C}}{C} K^{2(i+2)}$$

Et finalement $E_0^\omega(\tau_{i+2}) \leq (1 + \frac{e^{-C}}{C}) K^{2(i+2)}$, ce qui termine la preuve du lemme. $\square$

Soit $y \in B_{i-1}$, alors la fonction de Green

$$u(x) = E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2})$$

est ω -harmonique sur $B_{i+2} \setminus \{y\}$. Soit $z \in \partial B_i$, on suppose K suffisamment grand pour que $B(z, 2K^{i-1})$ ne rencontre pas y . Alors,

$$\begin{aligned} E_z^{\theta^y \omega}(\# \text{ visites de } 0 \text{ avant } \tau_{i+1}) &= E_{z+y}^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \inf\{n > 0 : X_n \notin B(y, K^{i+1})\}) \\ &\leq E_{z+y}^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2}) \\ &\leq \max_{x \in B(z, K^{i-1})} E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2}) \\ &\leq C \|E^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2})\|_{L^1(B(z, 2K^{i-1}))} \\ &\leq C \|E^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2})\|_{L^1(B_{i+2})} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de la moyenne à la troisième inégalité. Puis,

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in B_{i-1}} E_0^{\theta^y \omega}(\# \text{ visites de } 0 \text{ pendant } [\tau_i, \tau_{i+1}[) &\leq \sum_{y \in B_{i-1}} E_0^\omega E_{X_{\tau_i}}^{\theta^y \omega}(\# \text{ visites de } 0 \text{ avant } \tau_{i+1}) \\
&\leq C \sum_{y \in B_{i-1}} E_0^\omega \|E^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2})\|_{L^1(B_{i+2})} \\
&= C \frac{1}{|B^{i+2}|} \sum_{y \in B_{i-1}} \sum_{x \in B_{i+2}} E_x^\omega(\# \text{ visites de } y \text{ avant } \tau_{i+2}) \\
&= C \frac{1}{|B^{i+2}|} \sum_{x \in B_{i+2}} E_x^\omega(\# \text{ visites de } B_{i-1} \text{ avant } \tau_{i+2}) \\
&\leq C \frac{1}{|B^{i+2}|} \sum_{x \in B_{i+2}} E_x^\omega(\tau_{i+2}) \\
&\leq CC' K^{2(i+2)}
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance selon $\mathbb{P}$, on a $\sum_{y \in B_{i-1}} \mathbb{E} E_0^{\theta^y \omega}(\# \text{ visites de } 0 \text{ pendant } [\tau_i, \tau_{i+1}[) \leq CC' K^{2(i+2)}$.
Donc par invariance par translation

$$\mathbb{E}_0(\# \text{ visites de } 0 \text{ pendant } [\tau_i, \tau_{i+1}[) \leq CC' K^{(2-d)(i+2)}$$

D'où le résultat en sommant de $i = 0$ à $+\infty$, comme $d \geq 3$.

□

3.4 Contre-exemples

Les énoncés de récurrence et transience pour la marche aléatoire en milieu aléatoire sont des résultats "presque sûrs". Il est intéressant d'exhiber des contre-exemples particuliers.

On commence par donner des critères de récurrence et transience généraux, qu'on énonce ici dans le cadre des marches aléatoires en environnements aléatoires. (même si les résultats sont vrais dans un cadre plus général). Ces résultats font partie de ce qu'on appelle la théorie des *fonctions de Lyapounov*, et figurent dans [FMM95].

Pour ce qui suit, on suppose seulement que l'environnement ω est tel que (X_n) soit irréductible et apériodique. (Ce qui est vrai par exemple si ω est elliptique.) Une fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dite ω -sur-harmonique sur $E \subset \mathbb{Z}^d$ si $-L_\omega f(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Elle est dite *coercive* si $f(x) \rightarrow \infty$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Proposition 3.5 (Critère de récurrence). *La marche (X_n) dans l'environnement ω est récurrente s'il existe une fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, et un ensemble fini $A \Subset \mathbb{Z}^d$ tels que*

- i) *f est strictement positive*
- ii) *f est ω -sur-harmonique sur A^c*
- iii) *f est coercive.*

Proposition 3.6 (Critère de transience). *La marche (X_n) dans l'environnement ω est transiente s'il existe une fonction $f : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$, et un ensemble $A \subset \mathbb{Z}^d$ tels que*

- i) *f est strictement positive*
- ii) *f est ω -sur-harmonique sur A^c*
- iii) *il existe $x \in A^c$ tel que $f(x) < \inf_A f$.*

Démonstration. Soit $x \in A^c$. Par l'hypothèse ii), $E_x^\omega(f(X_1)) - f(x) \leq 0$. De plus, toujours par l'hypothèse ii) (et la propriété de Markov), $f(X_{n \wedge \tau_A})$ est une sur-martingale, ainsi $E_x^\omega(f(X_{n \wedge \tau_A})) \leq f(x)$ pour tout n . La sur-martingale $f(X_{n \wedge \tau_A})$ est positive par l'hypothèse i), donc il existe X_∞ telle que $f(X_{n \wedge \tau_A}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X_\infty$ P_x^ω -p.s. Par le lemme de Fatou, on a alors

$$E_x^\omega(f(X_\infty)) = E_x^\omega(\liminf f(X_{n \wedge \tau_A})) \leq \liminf E_x^\omega(f(X_{n \wedge \tau_A})) \leq f(x)$$

Prouvons 3.5 : Supposons que la marche *n'est pas* récurrente. Par l'hypothèse iii) il existe alors $n_0, \delta > 0$ et $x \in A^c$, tels que pour tout $K > 0$ et tout $n \geq n_0$,

$$P_x^\omega(f(X_n) > K, \tau_A = +\infty) > \delta$$

Mais dans ce cas $E_x^\omega(f(X_{n \wedge \tau_A})) \rightarrow \infty$, ce qui est impossible et prouve 3.5.

Prouvons 3.6 : Supposons que la marche *n'est pas* transiente. Dans ce cas $P_x^\omega(\tau_A < \infty) = 1$, donc $X_{n \wedge \tau_A} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X_{\tau_A}$ P_x^ω -p.s. On a alors $E_x^\omega(f(X_{\tau_A})) \leq f(x)$, mais $X_{\tau_A} \in A$ et ceci est vrai pour tout $x \in A^c$, donc contredit la condition iii) et prouve la proposition 3.6. $\square$

Remarque 3.7. Dans les deux cas, les conditions i), ii), iii), sont également nécessaires, voir [FMM95].

On déduit de la proposition 3.6 un autre critère de transience utilisant la notion duale de *mesure excessive* plutôt que les fonctions de Lyapounov.

Corollaire 3.8. La marche (X_n) dans l'environnement ω est transiente s'il existe une mesure ν sur $\mathbb{Z}^d$ vérifiant

i) ν est strictement positive

ii) ν est excessive : $\nu T_\omega \leq \nu$

iii) ν n'est pas invariante : $\nu T_\omega \neq \nu$

Démonstration. Supposons dans un premier temps (X_n) récurrente, alors la mesure

$$\pi(x) := E_0^\omega \sum_{n=0}^{r_0-1} \delta_{X_n}(x)$$

où r_0 est le premier temps de retour en 0, est invariante pour T_ω . On introduit alors la *marche retournée* donnée par le noyau de transition

$$\tilde{T}_\omega(x, y) := \frac{\pi(y)}{\pi(x)} T_\omega(y, x)$$

La mesure π est également invariante pour $\tilde{T}_\omega$ et pour tout $n \geq 1$ on a $T_\omega^n(x, x) = \tilde{T}_\omega^n(x, x)$, ce qui montre que la marche retournée est également récurrente. On en déduit que la marche (X_n) est transiente si c'est le cas de la marche retournée. Or, sous les hypothèses du corollaire, la fonction $f := \frac{\nu}{\pi}$ est strictement positive (hypothèse i), non constante (hypothèse iii), et vérifie pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$,

$$\tilde{T}_\omega f(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{i=1}^d (\omega_x(e_i) \nu(x + e_i) + \omega_x(-e_i) \nu(x - e_i)) \leq \frac{\nu(x)}{\pi(x)} = f(x)$$

par l'hypothèse ii). Par la proposition 3.6, la marche retournée est transiente, ce qui conclut la preuve. $\square$

On va maintenant se servir de ce critère pour exhiber un environnement transient en dimension 2, équilibré et uniformément elliptique.

Exemple 3.9 (Un environnement transient en dimension 2.). Cet exemple a été imaginé par Nina Gantert. Soit $1/4 < p < 1/2$ et soit $q = 1/2 - p$, donc $q < p$. On partage $\mathbb{Z}^2$ selon les diagonales en quatre secteurs coniques Nord, Sud, Est, Ouest. Pour les points situés dans les secteurs Nord et Sud, on attribue la probabilité q aux déplacements Nord/Sud et p aux déplacements Est/Ouest. Pour ceux situés dans les secteurs Est et Ouest, on attribue la probabilité p aux déplacements Nord/Sud et q aux déplacements Est/Ouest. L'intention est de privilégier les déplacements tangentiels et de minimiser les déplacements radiaux. Enfin pour les points situés sur les diagonales, on attribue la même probabilité ($1/4$) aux quatre directions. Soit alors ν la mesure constante égale à 1 sur $\mathbb{Z}^d$. La mesure ν est strictement positive, excessive, mais pas invariante. En effet

$$\nu L_\omega(x) = \begin{cases} 4q & \text{en } 0 \\ q + \frac{3}{4} & \text{sur } \{x : |x|_\infty = |x|_2 = 1\} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On peut donc appliquer le corollaire précédent, déduisant la transience.

Voici maintenant un exemple d'un environnement récurrent en dimension 3. Une preuve figure dans [PPS13], et repose sur le critère 3.5 avec la fonction de Lyapounov $f(x) = \log |x|$.

Exemple 3.10 (Un environnement récurrent en dimension 3). *Soit $\epsilon > 0$. On pose $\omega_x(\pm e_i) = 1 - 2\epsilon$ si i est l'indice de la plus grande coordonnée en valeur absolue de x , et $\omega_x(\pm e_j) = \epsilon$ sinon. Alors la marche dans l'environnement ω est récurrente pour ϵ suffisamment petit.*

En revanche, le résultat suivant figure dans [Zei01] (sans preuve).

Proposition 3.11. *Il existe $\kappa(d) < 1/2d$ tel que si $d \geq 3$ et si $\varepsilon(\omega) > \kappa(d)$, ω est transient. (On a noté $\varepsilon(\omega)$ la constante d'uniforme ellipticité de ω .)*

Références

- [All] Julien Allasia. Random walks in random environments. Internship report (McGill University, Montreal), ENS de Lyon.
- [Der80] Yves Derriennic. Quelques applications du théoreme ergodique sous-additif. *Astérisque*, 74(183-201) :20, 1980.
- [DR14] Alexander Drewitz and Alejandro F Ramírez. Selected topics in random walks in random environment. In *Topics in percolative and disordered systems*, pages 23–83. Springer, 2014.
- [Dur19] Rick Durrett. *Probability : theory and examples*, volume 49. Cambridge university press, 2019.
- [FMM95] Guy Fayolle, Vadim Aleksandrovich Malyshev, and Mikhail Vasilevich Menshikov. *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*. Cambridge university press, 1995.
- [Law82] Gregory F Lawler. Weak convergence of a random walk in a random environment. *Communications in Mathematical Physics*, 87(1) :81–87, 1982.
- [PPS13] Yuval Peres, Serguei Popov, and Perla Sousi. On recurrence and transience of self-interacting random walks. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 44(4) :841–867, 2013.
- [Zei01] Ofer Zeitouni. Lecture notes on random walks in random environments. *Preprint available at <http://www-ee.technion.ac.il/zeitouni/ps/notes1.ps>*, 2001.