

Exercice 1 1. Les matrices suivantes sont-elles des matrices associées à un produit scalaire euclidien ?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Montrer que l'application ϕ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(X, Y) = {}^t XAY,$$

est un produit scalaire.

(b) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer l'adjoint de l'application $u_a : (x, y) \mapsto (2x + ay, 0)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a est-elle symétrique ?

Exercice 2 On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t AB)$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques.

1. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux

(Indication : on pourra utiliser le fait que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$).

2. Soit p la projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^t M)$.

3. Calculer la distance de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

à $S_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel F d'équations

$$\begin{cases} x + y - 2z - t = 0 \\ x + y + t + z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormée de F .

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .

3. Calculer la distance de $(1, 0, 0, 0)$ à F .

Exercice 4 Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, et soit

$$\begin{aligned}\phi : E &\longrightarrow E \\ f &\mapsto f - f(0).\end{aligned}$$

Le but de l'exercice est de montrer que ϕ ne possède pas d'adjoint.

1. Soit $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

(Indication : pour $f \in E$, on pourra considérer la fonction $t \mapsto tf(t)$).

2. Supposons par l'absurde que ϕ possède un adjoint ϕ^* .

(a) Montrer que $\phi^*(h) = h$ pour $h \in H$.

(b) En déduire l'expression de ϕ^* puis conclure.

Exercice 5 Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?