Exercices de géométrie
Agrégation externe 2014-2015

N. Bédaride

Table des matières

1 Espaces affines **2**
- 1.1 Généralités . . . 2
- 1.2 Barycentres . . . 4
- 1.3 Équations . . . 5
- 1.4 Groupe affine . . . 5

2 Angles **7**

3 Calculs **8**
- 3.1 Utilisation des nombres complexes . . . 8
- 3.2 Dans le triangle . . . 9

4 Polyèdres et groupes d'isométries **10**
- 4.1 Autour du tétraèdre . . . 11
- 4.2 Groupes d'isométries . . . 11

5 Dimension trois **14**
- 5.1 Isométries dans l'espace . . . 14
- 5.2 Distances . . . 15

6 Topologie **16**
- 6.1 Convexité . . . 16
- 6.2 Points extrémaux . . . 17

7 Quadriques, coniques **18**
- 7.1 Coniques . . . 19
- 7.2 Résultant . . . 21

8 Espace projectif et inversions **22**
- 8.1 sphère de Riemann . . . 22
- 8.2 Inversion et homographies . . . 23

9 Références **24**

Les exercices marqués d'un $\square$ sont simples, ceux marqués d'un ✠ sont plus complexes et ceux marqués d'un ♠ peuvent faire l'objet d'un développement.

1 Espaces affines

1.1 Généralités

Exercice 1. $\square$

1. *Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à second membre nul est un espace vectoriel. Si les seconds membres ne sont pas nuls et qu'il existe une solution, c'est un espace affine.*
2. *Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel. Si le second membre est non nul, c'est un espace affine (ce qu'on formule souvent en disant que toute solution de l'équation est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière).*
3. *Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = \pi\}$ est un espace affine, trouver sa direction.*

Exercice 2. $\square$ *Soient $\mathcal{R} = (O; e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{R}' = (O'; e'_1, ..., e'_n)$ deux repères de $\mathcal{E}$. Soit $x \in \mathcal{E}$ et X, X' les matrices colonnes des coordonnées de x dans $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$. Écrire la relation entre X et X'.*

Exercice 3. $\square$ *Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. Soit $\mathcal{R} = (O; e_1, ..., e_n)$ un repère de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{R}' = (O'; f'_1, ..., f'_p)$ un repère de $\mathcal{F}$. Soit X la matrice colonne des coordonnées d'un point $x \in \mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$ et Y celle de $\phi(x)$ dans $\mathcal{R}'$. Exprimer Y en fonction de X.*

Exercice 4. $\square$ *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une application affine, montrer que tous les $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces affines parallèles.*

Exercice 5. *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de direction F et G. Montrer que :*

i) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors

$$dim\, Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = dim\, F + dim\, G - dim\, F \cap G.$$

ii) Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors

$$dim\, Aff(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = dim\, F + dim\, G - dim\, F \cap G + 1.$$

iii) A quelle condition $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est un sous-espace affine ?

Exercice 6. $\square$ *Donner l'intersection des plans suivants de $\mathbb{R}^4$*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + t = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x - t = 3 \end{cases}$$

Exercice 7. *Soient $\phi_1, ..., \phi_k$ k fonctions affines sur $\mathcal{E}$ de partie linéaire $f_1, ..., f_k$. Soit*

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{E} : \phi_i(x) = 0, i = 1, ..., k\}.$$

1) Montrer que si $\mathcal{V}$ n'est pas vide, alors c'est un espace affine de dimension $dim\, E - rg\,(f_1, ..., f_k)$. (On pourra considérer l'application $x \in \mathcal{E} \mapsto (\phi_1(x), ..., \phi_k(x)) \in \mathbb{R}^k$.)

2) Montrer que si la famille $(f_1, ..., f_k)$ est libre alors $\mathcal{V}$ n'est pas vide.

Exercice 8 (Thales)**.** *Soient d, d', d'' 3 droites parallèles distinctes, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ 2 droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Montrer alors*

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

On pourra commencer par le cas de deux droites parallèles.

Réciproquement, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie l'égalité

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}},$$

montrer alors $B = A''_1$.

(Remarque : Si A, B, C sont 3 points alignés, et u un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent, on peut écrire $\overrightarrow{AB} = \lambda u$ et c'est ce nombre λ qu'on note $\overline{AB}$. Cette mesure algébrique dépend du choix de u. En revanche, le rapport $\overline{AB}/\overline{AC}$ n'en dépend pas.)

Exercice 9. *Soient A, B et C trois points d'une droite $\mathcal{D}$ et A', B' et C' trois points d'une droite $\mathcal{D}'$ distincte de $\mathcal{D}$. Si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB'), alors (AC') est parallèle à (CA').*

Exercice 10 (Menelaus)**.** *Soit ABC un triangle, on considère les points a, b, c sur les droites $(BC), (AC), (AB)$. Montrer que les point a, b, c sont alignés si et seulement si*

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{aC}} * \frac{\overline{bC}}{\overline{bA}} * \frac{\overline{cA}}{\overline{cB}} = 1.$$

[On utilisera à bon escient le théorème de Thalès.]

Exercice 11 (Desargues)**.** ✠ *Soient $ABC, A'B'C'$ deux triangles du plan affine sans sommet commun*

1. *Si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes et que $(AB) \parallel (A'B'), (AC) \parallel (A'C')$ montrer alors que $(BC) \parallel (C'B')$.*
2. *Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes si $(AB) \parallel (A'B'), (AC) \parallel (A'C'), (BC) \parallel (C'B')$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant eux de ces droites concourantes et utiliser la première question.*

Exercice 12 (Desargues en plus simple)**.** ♠ *On considère trois droites concourantes non coplanaires. Sur chaque droite on considère deux points différents du point commun : a, a', b, b', c, c'.*

1. *On suppose que les droites (bc) et $(b'c')$ se coupent ainsi que celles obtenues par permutation. Montrer que les trois points d'intersection sont alignés.*
2. *En déduire le théorème de l'exercice précédent en introduisant un point hors du plan.*

1.2 Barycentres

Exercice 13. □ *Montrer que les points* $x_i, i = 1 \dots n{+}1$ *de coordonnées barycentriques* $(x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n+1))i = 1 \dots n+1$ *de l'espace affine de dimension* n *constituent une base affine si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(n+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_i(n+1)2 & x_i(2) & \dots & x_i(n+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ x_{n+1}(n+1)2 & x_{n+1}(2) & \dots & x_{n+1}(n+1)) & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exercice 14. □ *Montrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

Exercice 15. □

1) *Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.*
2) *Montrer que le centre de gravité d'un tétraèdre est le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.*

Exercice 16. □

1) *Dans un plan affine réel, décrire l'intérieur d'un triangle* ABC *en termes de barycentres.*
2) *Soit* ϕ *une bijection affine. Montrer que l'image par* ϕ *de l'intérieur de* ABC *est l'intérieur du triangle* $\phi(A)\phi(B)\phi(C)$.

Exercice 17 (Céva)**.** ✠ *Soit* ABC *un triangle, on considère les points* a, b, c *sur les droites* $(BC), (AC), (AB)$. *Montrer que les droites* $(Aa), (Bb), (Cc)$ *sont concourantes ou parallèles si et seulement si*

$$\frac{\overline{aB}}{\overline{\overline{aC}}} * \frac{\overline{bC}}{\overline{\overline{bA}}} * \frac{\overline{cA}}{\overline{\overline{cB}}} = -1$$

On fera trois étapes en utilisant la notion de barycentre :

- *Montrer la formule si les droites sont parallèles.*
- *Montrer la formule si les droites sont concourantes.*
- *Si la formule est vraie, et que les droites ne sont pas parallèles montrer qu'elles sont concourantes en raisonnant par l'absurde.*

Exercice 18. ♠ *Soit* ABC *un triangle non plat. Montrer que les coordonnées barycentriques d'un point* M *dans le repère affine* (A, B, C) *intérieur au triangle sont proportionnelles aux aires orientées des triangles* MBC, MCA, MAB. *On trouvera ces coordonnées via le produit vectoriel et un système linéaire.*

Exercice 19. *Dans le plan affine, on considère un triangle* ABC *et une droite* D *qui coupe* (BC) *en* P, (CA) *en* Q *et* (AB) *en* R. *On définit* 3 *points* I, J *et* K *par*

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}\ ,\ \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BR}\ ,\ \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}.$$

Montrer que les points I, J *et* K *sont alignés.*

Exercice 20. ✠ *Soit* ABC *un triangle équilatéral et* M *un point de son plan. On note* A', B', C' *les symétriques de* M *par rapport à* $(BC), (CA), (AB)$. *Montrer que les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *sont concourantes sauf si* M *est sur le cercle passant par les points* A_1, B_1 *et* C_1 *où* A_1 *est le symétrique de* A *par rapport à* (BC), B_1 *celui de* B *par rapport à* (AC) *et* C_1 *celui de* C *par rapport à* (AB).

– *Caractériser ce cercle.*
– *Donner les coordonnées barycentriques de M en fonction de trois longueurs.*
– *Exprimer les coordonnées barycentriques des autres points.*

Exercice 21. *Soit ABC un triangle et α, β, γ trois réels différents de 1. Soit L le barycentre de $(B, 1), (C, -\alpha)$, M celui de $(C, 1), (A, -\beta)$ et N celui de $(A, 1), (B, -\gamma)$. De même, soit L' le barycentre de $(C, 1), (B, -\alpha)$, M' celui de $(A, 1), (C, -\beta)$ et N' celui de $(B, 1), (A, -\gamma)$.*
1) *Donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que les points L, M, N soient alignés.*
2) *Montrer que sous cette même condition, les points L', M', N' sont alignés. La droite passant par les points L', M' et N' est appelée l'isotomique de la droite passant par L, M, N, par rapport au triangle ABC.*
3) *Montrer que les milieux de $[AL]$, $[BM]$, et $[CN]$ sont alignés. La droite passant par ces milieux est la droite de Newton.*

1.3 Équations

Exercice 22. $\mathbb{R}^3$ *étant muni d'un repère affine (O, i, j, k), décrire par un système d'équations paramétriques le sous-espace affine engendré par les points $A_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $1 \leq i \leq 3$.*

Exercice 23. □ *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine muni d'un repère $\mathcal{R} := (O; e_1, e_2)$.*
1) *Montrer que l'équation cartésienne d'une droite est de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Donner l'équation cartésienne de la droite vectorielle qui dirige cette droite affine.*
2) *Deux droites d'équation $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si* $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0.$
3) *Trois droites d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $1 \leq i \leq 3$, sont concourantes ou parallèles si et seulement si* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$
4) *On se donne deux équations cartésiennes de plan dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$: $(\mathcal{P}_1)$ d'équation $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, et $(\mathcal{P}_2)$ d'équation $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Donne une CNS sur les coefficients pour que ces deux plans soient parallèles ? s'intersectent selon une droite ? Soit $(\mathcal{P}_3)$ d'équation $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$. CNS pour que les trois plans soient parallèles ? qu'ils s'intersectent selon une droite ? selon un point ?*

Exercice 24. □ *A quelles conditions les deux systèmes d'équations*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{array} \right.$$

décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$? des droites affines parallèles de $\mathbb{R}^3$?

1.4 Groupe affine

Exercice 25. *Montrer qu'une application est affine si et seulement si elle préserve les barycentres. Montrer que l'image d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Exercice 26. $\square$ *Soient A, B deux points du plan et λ, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Déterminer la composition de l'homothétie de centre A et de rapport λ avec l'homothétie de centre B et de rapport μ.*

Exercice 27. $\square$ *Montrer que l'ensemble des homothéties et translations est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.*

Exercice 28. *Soit G un groupe fini du groupe affine du plan. Montrer qu'il existe un point fixe par tout élément du groupe.*

Exercice 29. *Montrer que le groupe affine est un produit semi-direct du groupe linéaire par le groupe des translations. Montrer que ce groupe s'injecte dans $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ ou n est la dimension de l'espace affine.*

Exercice 30. $\square$ *$\mathbb{R}^3$ étant muni d'un repère affine, décrire en coordonnées*

1) une translation de vecteur t,

2) une homothétie de centre A et de rapport λ.

Exercice 31. $\square$ *On considère les deux droites D_1, D_2 données par les équations $x+y=2, 2x-y=4$.*

1. *Donner l'expression analytique de la projection sur D_1 parallèlement à D_2.*
2. *Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2.*
3. *Donner l'expression analytique de l'affinité de base D_1 de direction D_2 de rapport 3.*

Exercice 32. *Déterminer la nature des applications affines*

$$\phi : (x,y) \mapsto (\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + 1, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - 1).$$

$$\psi : (x,y) \mapsto (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1).$$

$$\xi : (x,y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y).$$

Exercice 33. *Montrer que si une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ préserve les distances, alors elle est affine. Suggestion : Si A, B, C sont trois points de $\mathcal{E}$, alors $\langle \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)}, \overrightarrow{\phi(A)\phi(C)} \rangle = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$.*

Exercice 34. *Montrer qu'une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une similitude affine s'il existe $k > 0$ tels que pour tous points M, N d'image M', N' on ait*

$$d(M', N') = kd(M, N).$$

Exercice 35.

1) Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[AC]$. Montrer que l'orthocentre du triangle IJK est le centre O du cercle circonscrit à ABC.

2) Soit G le centre de gravité de ABC et h l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Quelle est l'image par h de A, B, C? De la hauteur de ABC passant par A? De l'orthocentre H du triangle ABC? En déduire que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OJ}$.

3) Soit AB la corde d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le lieu de l'orthocentre du triangle ABM lorsque M décrit $\mathcal{C}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à (AB).

2 Angles

Exercice 36. *On considère un triangle ABC. On note a, b, c, R les mesures des côtés BC, AC, AB et du rayon du cercle circonscrit. On note α, β, γ les mesures des angles non orientés en A, B, C respectivement.*

1) Montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

2) Montrer que

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Exercice 37.

1) Montrer que dans un triangle ABC, les bissectrices intérieures sont concourantes en un point I équidistants des 3 côtés du triangle et donc centre d'un cercle tangent aux 3 côtés du triangle, le cercle inscrit.

2) Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle en A et les 2 bissectrices extérieures des angles en B et C sont concourantes en un point J équidistant des 3 côtés du triangle et donc centre d'un cercle tangent aux 3 côtés du triangle, le cercle exinscrit dans l'angle A.

Exercice 38. ✠ *Soient D, D' et D'' trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Soient u, u' et u'' des vecteurs directeurs unitaires choisis de telle sorte que*

$$\langle u', u''\rangle = \cos a\ ,\ \langle u'', u\rangle = \cos b,$$

où a, b désignent les angles géométriques de D', D'' d'une part et D'', D d'autre part.

Soit H l'hyperplan vectoriel $D''^{\perp}$ et x, x' les projections orthogonales de u et u' sur H. On pose enfin $v = \dfrac{x}{||x||}$ et $v' = \dfrac{x'}{||x'||}$ et α désigne l'angle géométrique des vecteurs v et v'. Montrer que

$$\langle u, u'\rangle = \cos a\cos b + \langle v, v'\rangle \sin a\sin b = \cos a\cos b + \cos\alpha\sin a\sin b.$$

En déduire que l'angle géométrique définit une distance sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. On pensera à faire un dessin sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 39. *Montrer que si un polygone inscrit dans un cercle a tous ses angles égaux et a un nombre impair de côtés, alors tous ses côtés ont même longueur.*

Exercice 40. ♠ *Soit C un cercle de centre O et M, A, B trois points dessus. Montrer le* **théorème de l'angle au centre** *:*

$$(OA, OB) = 2(MA, MB) \mod 2\pi$$

Soit τ la tangente en A au cercle et T un point dessus. Montrer que

$$(AT, AB) = (MA, MB) \mod \pi$$

Exercice 41. *Soient A, B deux points distincts du plan et α un réel. On considère l'ensemble*

$$\{M, (MA, MB) = \alpha \mod \pi\}$$

Montrer que c'est un cercle passant par A, B dont la tangente en A vérifie pour tout point T dessus $(AT, AB) = \alpha \mod \pi$.

C'est le **cercle capable d'angle** α.

Exercice 42. *Montrer que l'ensemble suivant est un arc de cercle du cercle précédent.*

$$\{M, (MA, MB) = \alpha \mod 2\pi\}$$

Exercice 43. ♠ *Montrer que quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si*

$$(CA, CB) = (DA, DB) \mod \pi$$

3 Calculs

3.1 Utilisation des nombres complexes

Exercice 44. □ *Le point d'affixe z est sur la droite (AB) si et seulement si*

$$det \begin{pmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 45. *Le point M est sur le cercle de centre Ω de rayon R si $|z-\omega| = R$.*

Exercice 46. *Trois points sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si*

$$a + jb + j^2c = 0$$

Exercice 47. *On a $arg(z) = \theta \mod \pi$ si et seulement si $z = \overline{z}e^{2i\theta}$.*

Exercice 48. Lignes de niveaux. *Soient a, b deux complexes différents et λ un nombre réel. Montrer que :*
- *L'ensemble des solutions de $|z-a| = \lambda|z-b|$ est soit vide soit un point soit une droite soit un cercle.*
- *L'ensemble des solutions de $|z-a| + |z-b| = \lambda$ est vide, ou deux points ou un segment ou une ellipse.*
- *L'ensemble des solutions de $Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \theta \mod \pi$ est soit la droite AB soit un cercle privé de deux points.*
- *$Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \theta \mod 2\pi$ est soit la droite privée du segment $\theta = 0$ soit le segment privé des bords, soit un arc de cercle privé de A, B.*

Exercice 49. *Montrer que quatre points A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si*

$$\frac{a-d}{b-d} \times \frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$$

Faire le lien avec un exercice précédent.

Exercice 50 (Ptolémé)**.** ✠♠ *Quatre points A, B, C, D non alignés. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible si et seulement si $AC.BD = AB.CD + AD.BC$. Indications :*
- *Réecrire la relation sous la forme $\frac{AC}{DC.DA} = \ldots$*
- *Introduire une inversion de centre D de rapport k.*

– *Utiliser un exercice sur les inversions.*

Exercice 51.

a) Si R désigne la rotation d'angle θ et de centre A, donner l'affixe d'un point $M' = R(M)$ en fonction de l'affixe de M.

b) Donner de même l'écriture en nombre complexe d'une réflexion, puis d'une symétrie glissée.

c) Pour $a \in U(1)$, quelle est l'isométrie qui s'écrit $z \mapsto a\overline{z} + b$?

3.2 Dans le triangle

Soient A, B, C trois points non alignés et a, b, c les longueurs des côtés du triangle formé par ces points.

Exercice 52. ☐ *On considère un triangle ABC rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Montrer*

1. $AB^2 = BC.BH$
2. $HA^2 = HB.HC$
3. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC}^2$

Exercice 53. ☐ *Dans un triangle quelconque, Montrer*

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\vec{BC}.\vec{BH}$
2. $AH^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a}$

Exercice 54. *Les bissectrices intérieures et extérieurs issues de A ont pour longueurs*

1. $d = \frac{2\sqrt{bc(p-a)p}}{b+c}$
2. $d' = \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{|b-c|}$

Exercice 55. *Montrer*

1. *La médiane issue de A donne un segment de longueur :*

$$\mu^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

2. *De plus $\mu_A^4 + \mu_B^4 + \mu_C^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$.*
3. *Les trois longueurs des médianes vérifient les inégalités triangulaires.*

Exercice 56. *Soit S l'aire du triangle, montrer alors :*

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S = rp = (p-a)r_a = \frac{abc}{4R}$$

ou p est le demi périmètre du triangle.

Exercice 57. ✠♠ *Montrer*

1. *Le centre du cercle inscrit est barycentre de*

$$(A, a); (B, b); (C, c)$$

2. *Le centre du cercle circonscrit est barycentre de*

$$(A, \sin(2A)); (B, \sin(2B)); (C, \sin(2C))$$

3. *L'orthocentre est barycentre de*

$$(A, \tan(A)); (B, \tan(B)); (C, \tan(C))$$

4 Polyèdres et groupes d'isométries

Exercice 58.

1. *Rappeler la définition d'un simplexe de dimension* $d \leq 3$.
2. *Définir un polyèdre comme union de simplexes.*
3. *Trouver une décomposition du cube comme union de simplexes.*
4. *Qu'apporte l'hypothèse supplémentaire* $P = \overline{P^\circ}$ *?*

Exercice 59. ✠ *Soit* v *un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^3$*, on définit*

$$H_v = \{y \in \mathbb{R}^3, < v, y >= 1\}$$

$$H_v^+ = \{y \in \mathbb{R}^3, < v, y > \leq 1\}$$

1. *Soit* P *un polyèdre d'isobarycentre l'origine, et* $v_1 \dots v_k$ *sont les sommets de* P*, montrer alors que* $\bigcap_{i \leq k} H_{v_i}^+$ *est un polyèdre. On montrera qu'il est compact par l'absurde. C'est le* **polyèdre dual** *de* P*, noté* P^*.
2. *Montrer qu'une face de* P^* *est de la forme* H_v *pour un* v *particulier..*
3. *Caractériser une arête du polyèdre dual.*
4. *Montrer que les sommets de* P^* *sont les centres des faces de* P.

Exercice 60. *Trouver le dual du tétraèdre, du cube, de l'icosaèdre.*

Exercice 61. *On considère dans le plan une partie* X *bornée connexe formée d'union de polygones telle que deux polygones s'intersectent suivant une arête ou un sommet et que pour tout polygone il existe un polygone de* X *(différent) qui l'intersecte suivant une arête. On note* S, A, F *le nombre de sommets, d'arêtes et de faces.*

1. *Montrer que si l'on triangularise* X *alors* $S - A + F$ *est constant.*
2. *Donner une définition du bord de* X.
3. *Montrer que* $S - A + F$ *est constant si on effectue une des deux opérations :*
   - *On enlève un triangle de* X *ayant un sommet sur le bord.*
   - *On enlève un triangle de* X *ayant une arête sur le bord.*
4. *En déduire que* $S - A + F = 2$.

Exercice 62. *Soit P un polyèdre convexe, on note S, A, F le nombre de sommets, d'arêtes et de faces.*

1. *On considère G l'isobarycentre de P et $R > 0$. On considère alors la projection centrale de centre G sur la sphère de rayon R de centre G. Montrer que pour R grand la projection de P est un ensemble homéomorphe au X de l'exercice précédent.*
2. *Montrer que $S - A + F = 2$. C'est la* **formule d'Euler***.*
3. *Trouver un polyèdre ou la formule est fausse.*
4. *Reprendre la première question en projettent P sur un plan contenant une face de P et en agrandissant la face.*

4.1 Autour du tétraèdre

Exercice 63. $\square$ *Montrer que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leur milieu.*

Exercice 64. *Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné $\mathcal{A}_4$. Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G.*

Exercice 65. *Par définition, un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les côtés sont isométriques (autrement dit, c'est l'enveloppe convexe de quatre points A_1, ..., A_4 tels qu'il existe $a > 0$ vérifiant : pour tout $i \neq j$, $||\overrightarrow{A_iA_j}|| = a$).*

Le jury a posé en 2008 la question suivante : est-ce qu'un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire est nécessairement régulier ?

1) Dans un plan de $\mathbb{R}^3$, on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $CA(= CB) > AB$. On cherche l'ensemble des points $D \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$DA = DB = CA = CB \quad \text{et} \quad DC = AB.$$

Montrer que cet ensemble est un cercle.

2) Répondre au jury.

Dans l'exemple précédent, les 4 faces sont isométriques. On se propose de montrer que c'est un fait général : si un tétraèdre a ses 4 faces de même aire, alors ses 4 faces sont isométriques.

1) Soient I, J les pieds sur (AB) et (CD) de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD). Montrer que

$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}||^2,$$
$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JD}||^2.$$

2) Montrer que les faces du tétraèdre sont isométriques (on pourra considérer le retournement autour de la droite (IJ)).

4.2 Groupes d'isométries

Exercice 66. *Trouver le groupe d'isométries préservant la courbe $y = \sin x$. On écrira la forme générale d'une isométrie du plan.*

Exercice 67. *Trouver le groupe d'isométries préservant l'astroide donnée par*

$$\begin{cases} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi[.$$

Exercice 68. *Trouver les isométries préservant une hélice circulaire.*

Exercice 69. *Soit A une partie finie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $Is(A) \subset SO(2)$ si et seulement si A n'admet pas d'axe de symétrie. Est ce vraie si A est infinie ?*

Exercice 70. *Trouver une partie du plan dont le groupe d'isométries est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indications :*
- *Soit r une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ centrée à l'origine et B un segment ne passant pas par l'origine. Considérer $\bigcup r^k(B)$.*
- *Montrer que cet ensemble n'est pas invariant par une autre rotation.*
- *Montrer qu'il n'est pas invariant par une symétrie axiale ne passant pas par l'origine.*
- *Ajuster B.*

Exercice 71. ♠✠ *Soit G un sous groupe fini de $SO(3)$. On suppose d'abord que G ne stabilise aucune droite.*

1. *A chaque élément de G diffèrent de l'identité on lui associe son axe et les deux points sur la sphère unité. Montrer que G agit sur cet ensemble X : Si P est un pole fixe par g, on regardera le pole fixé par hgh^{-1}.*
2. *On note s le nombres d'orbites et ν_i le cardinal du stabilisateur de chaque orbite. En calculant le cardinal de $\{(g, x) \in (G, X), g.x = x\}$ de deux façons montrer que le nombre d'orbites vaut*

$$s = \frac{1}{|G|} \sum_g |Fix(g)| \quad \textbf{Formule de Burnside}.$$

3. *En déduire que pour cette action on a : $2(1 - \frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{s} (1 - \frac{1}{\nu_i})$.*
4. *Montrer que $s = 3$. On supposera alors $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$.*
5. *Montrer que $\nu_1 = 2$ et que $\nu_2 = 2$.*
6. *En déduire que les seules possibilités pour $|G|$ et les ν_i sont*

$$(12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5).$$

7. *Dans le cas ou G stabilise une droite, montrer que G est conjugué à un sous groupe de D_n.*

Exercice 72. ♠ *On considère un tétraèdre régulier,et $Is(T)$ son groupe d'isométries.*

1. *Montrer que si f est une isométrie préservant T, alors l'ensemble des points extrémaux est globalement invariant. (On regardera l'exercice 108).*
2. *Construire un morphisme de groupe de $Is(T)$ dans $\mathfrak{S}_4$.*
3. *Montrer qu'il est injectif.*
4. *Construire une isométrie dont l'image par le morphisme soit une transposition.*
5. *En déduire $Is(T)$.*

Exercice 73. *Montrer que $\mathcal{A}_4$ est le seul sous groupe d'indice deux de $\mathfrak{S}_4$. En déduire $Is^+(T)$.*

Exercice 74. ♠ *On considère un cube C.*

1. *En étudiant les diagonales des faces, montrer qu'il existe deux tétraèdres réguliers inscrits dans ce cube ayant une face en commun.*
2. *Soit s_0 la symétrie centrale par rapport au centre du cube. Montrer que s_0 commute avec tous les éléments de $Is(C)$.*
3. *En déduire l'existence d'une application de $Is(C)$ dans $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (On utilisera l'exercice précédent).*
4. *Montrer que c'est un morphisme, puis un isomorphisme.*
5. *Trouver une isométrie positive du cube dont l'image par le morphisme soit de la forme $(\tau, 0)$ ou τ est une transposition.*
6. *En déduire que $Is^+(C)$ contient un sous groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et qu'il est d'indice deux dans $Is(C)$. Conclure.*

Exercice 75. ✠ *Soit P un polyèdre et $Is(P)$ son groupe d'isométries. Montrer que $Is(P)$ est produit direct de $Is^+(P)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe une symétrie centrale dans $Is(P)$. On définira une application de $Is(P)$ dans le produit en utilisant la symétrie centrale. Remarquez qu'en dimension deux le résultat est faux car la symétrie centrale est un déplacement.*

Exercice 76. ✠ *On considère un polyèdre dont les sommets sont donnés par*

$$(0, \pm\varphi, \pm 1)$$

ainsi que les permutés cycliques. Montrer que cela définit un polyèdre à 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces. Montrer qu'il est régulier et que chaque arête a pour longueur 2. **C'est l'icosaèdre régulier**.

Exercice 77. ✠♠ *On considère un icosaèdre régulier. On va montrer que $Is^+(I)$ est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.*

1. *On considère une droite passant par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que cela définit une rotation d'angle π dans $Is(I)$.*
2. *Montrer qu'elles commutent toutes et que chacune partitionne les sommets en trois sous ensembles de 4 sommets chacun lié à une droite particulière.*
3. *On considère une droite passant par les centres de deux faces opposées. Montrer qu'il existe deux rotations dans $Is(I)$ de cet axe et d'angles $\pm 2\pi/3$.*
4. *Montrer que ceci partitionne les sommets en quatre triangles équilatéraux.*
5. *On considère une droite passant par deux sommets opposés. Montrer qu'il existe deux rotations dans $Is(I)$ de cet axe et d'angles $k\pi/5$.*
6. *Comptez le nombre de rotations obtenues. Montrer qu'un élément de $Is^+(I)$ est forcément de cette forme. Conclure avec un exercice précédent.*

5 Dimension trois

5.1 Isométries dans l'espace

Exercice 78. ♠ *Si f est une isométrie d'un espace affine de dimension n, montrer qu'il existe un unique couple (g,u) ou u est un vecteur de l'espace vectoriel et g une isométrie ayant au moins un point fixe tels que $f = t_u \circ g = g \circ t_u$. On commencera par chercher ou se trouve u et on utilisera une propriété des endomorphismes orthogonaux.*

Exercice 79. □ *Soient u_1, u_2, v_1 v_2 des vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$ tels que $||u_1 - u_2|| = ||v_1 - v_2||$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.*

Exercice 80. □ *Montrer qu'une rotation est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant l'axe de la rotation. De plus l'un des deux plans peut être pris de manière arbitraire.*

Exercice 81. *Soient ϕ et ψ deux rotations affines dans l'espace euclidien de dimension 3. Quand l'angle de $\psi \circ \phi$ est-il la somme des angles des deux rotations ?*

Exercice 82. *Quelle est la composée de 3 réflexions orthogonales de plans parallèles ?*

Exercice 83. *Décrire la composée de 3 réflexions de plans orthogonaux deux à deux.*

Exercice 84. *Dans $\mathbb{R}^3$ orienté, on note s_P la réflexion vectorielle de plan P.*
1) Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour (par rapport à quelle droite ?)
2) Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de deux demi-tours est-elle un demi-tour ?
3) Montrer que $SO(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $SO(3)$.

Exercice 85. ✠ *On note ρ_1 et ρ_2 deux rotations affines de $\mathbb{R}^3$ et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, montrer que :*

1. *Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.*
2. *Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque rotation en produit de réflexion par rapport à des plans bien choisis).*
3. *Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segement $[O, \rho_2(O)]$).*
4. *Dans le cas ou ρ est une rotation, donnez son angle et son axe en fonction de ceux de ρ_1, ρ_2.*

Exercice 86. ✠♠ *On veut montrer que $SO(3)$ est simple, i.e. ses seuls sous-groupes distingués sont les sous-groupes triviaux $SO(3)$ et $\{Id\}$. Soit donc N un sous-groupe distingué de $SO(3)$. On suppose $N \neq \{Id\}$ et on veut montrer que $SO(3) = N$.*
1) Vérifier qu'il suffit de montrer que N contient un demi-tour.
2) Montrer qu'on peut supposer que N contient une rotation f d'angle $\theta \in]0, \pi[$. Soient a un vecteur unitaire dirigeant l'axe de f, x un vecteur unitaire orthogonal à a et $y = f(x)$. Soit $d = ||x - y||$. Montrer que $\forall m \in [0, d]$, il existe x_1 unitaire tel que $||f(x_1) - x_1|| = m$. On note $x_2 = f(x_1)$.

3) Fixons $m \in [0,d]$. Soient y_1, y_2 unitaires tels que $||y_1 - y_2|| = m$. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(x_1) = y_1$, $r(x_2) = y_2$. En déduire qu'il existe $g \in N$ tel que $g(y_1) = y_2$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et ρ_n la rotation d'axe a et d'angle $\frac{\pi}{n}$ avec n assez grand pour que $||x - \rho_n(x)|| \leq d$. Soient $x_0 = x$, $x_1 = \rho_n(x)$, $\ldots$, $x_{i+1} = \rho_n(x_i)$, $\ldots$
- *Que vaut x_n ?*
- *Montrer qu'il existe une rotation $u_i \in N$ telle que $u_i(x_i) = x_{i+1}$.*
- *Soit $\nu = u_{n-1} \circ \ldots \circ u_1 \circ u_0$. Que vaut $\nu(x)$?*
- *Montrer que ν est un demi-tour et que ν est dans N.*
- *Conclure.*

Exercice 87. ✠ *Cet exercice est tiré du sujet de 1998. Supposons qu'il existe une partition du plan affine euclidien en cercles de rayons non nuls : $(C_i)_{i\in I}$. On notera D_i le disque de bord C_i*

1. *Montrer qu'il existe une suite $(i_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que*

$$D_{i_{n+1}} \subset D_n, \quad r_{i_{n+1}} \leq \frac{r_n}{2}$$

   On pourra considérer le centre de D_i.
2. *En déduire que $\bigcap_{i_n} D_{i_n}$ est réduite à un point.*
3. *Conclure à une contradiction.*

Maintenant on se place dans l'espace affine euclidien de dimension trois.

1. *Montrer qu'une sphère privée de deux points admet une partition en cercles.*
2. *Soit D une droite et 0 un point dessus. Montrer que les cercles de rayon un centrés en $0_m \in D$ avec $OO_m = 4m + 1, m \in \mathbb{Z}$ vérifient :*
   - *Ils sont deux à deux disjoints.*
   - *Toute sphère de centre 0 coupe la famille de ces cercles en exactement deux points.*
3. *En combinant les deux questions trouver une partition de l'espace en cercles.*

5.2 Distances

Exercice 88. *Montrer que pour deux droites de $\mathbb{R}^3$ non parallèles il existe une unique perpendiculaire commune. On utilisera l'inégalité de Cauchy Schwartz.*

Pour deux droites non coplanaires, calculer la distance entre ces droites. On montrera que

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = | < u \wedge u', AA' > |$$

ou u, u' sont des vecteurs directeurs des droites et A, A' des points.

Exercice 89. *Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ deux droites non coplanaires.*

1) Montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2) Si M_1 et M_2 sont les deux points d'intersection de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, montrer que M_1M_2 est la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 90. *Soit $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction affine et $\mathcal{H} := \Psi^{-1}(0)$ le plan affine qu'elle définit. Comment calculer la distance d'un point A de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{H}$?*

Exercice 91. ✠ *Dans* $\mathbb{R}^3$*, on se donne un plan* $\mathcal{P}$ *et deux points* A *et* B *dans un même demi-espace délimité par* $\mathcal{P}$*. Trouver un point* M *sur* $\mathcal{P}$ *tel que* $AM + BM$ *soit minimum. Faire la même chose en dimension deux et faire le lien avec le billard dans un polygone.*

Exercice 92. *Dans* $\mathbb{R}^3$*, on se donne deux plans* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *et deux points* A *et* B*. Trouver* P_1 *sur* $\mathcal{P}_1$ *et* P_2 *sur* $\mathcal{P}_2$ *pour que* $AP_1 + P_1P_2 + P_2B$ *soit minimal.*

Exercice 93. *Soit* ABC *un triangle dont tous les angles au sommet sont aigus. On cherche* $P \in [BC]$*,* $Q \in [AB]$ *et* $R \in [AC]$ *pour que le périmètre du triangle* PQR *soit minimal.*

1) *Montrer qu'une solution existe.*
2) *On fixe* $P \in [BC]$*. Déterminer* $Q \in [AB]$ *et* $R \in [AC]$ *pour que le périmètre du triangle* PQR *soit minimal. On pourra faire intervenir les symétriques* P', P'' *de* P *par rapport à* $[AC]$ *et* $[AB]$*.*
3) *Montrer que la mesure de l'angle géométrique* $P'AP''$ *ne dépend pas de* P*. En déduire que la distance* $P'P''$ *est atteinte lorsque* P *est le pied de la hauteur issue de* A*.*
4) *Conclure.*

Exercice 94. *Soit* T *un triangle d'un plan affine euclidien. Etant donné un point* M *intérieur à* T*, on appelle* p, q, r *les distances de* M *aux trois côtés de* T*. Trouver* M *pour que le produit soit maximum. (Indication : donner les coordonnées barycentriques de* M *en fonction des aires des petits triangles* MAB*,* MBC *et* MAC *et se ramener à un problème d'optimisation sous contrainte.)*

6 Topologie

6.1 Convexité

Exercice 95. *Trouver un ensemble fermé dont l'enveloppe convexe n'est pas fermée.*
Trouver un ensemble non convexe tel que pour tous $x, y \in C$ $\frac{x+y}{2}$ *soit dans* C*.*

Exercice 96. *Soit* C, C' *deux convexes.*

1. *Montrer que l'ensemble* $\{\frac{M+N}{2}, M \in C, N \in C'\}$ *est un convexe.*
2. *Si* C, C' *sont deux segments de* $\mathbb{R}^3$*, déterminer l'ensemble précédent.*

Exercice 97. *Soient* A, B, C *trois points non alignés du plan. Soit* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de points déterminée par* $M_0 = A, M_1 = B, M_2 = C, M_n = \frac{M_{n-1}+M_{n-2}+M_{n-3}}{3}$*. Trouver* $\lim M_n$*.*

Exercice 98.

1) *Montrer que* $U \subset E$ *est ouvert si et seulement si* $O + U \subset \mathcal{E}$ *est ouvert pour tout* $O \in \mathcal{E}$*.*
2) *Montrer qu'une application affine est continue.*
3) *Montrer qu'une bijection affine (respectivement une fonction affine non constante) est ouverte.*

Exercice 99. *Montrer qu'un ensemble est convexe si et seulement si tout point est barycentre à coefficients positifs de points de cet ensemble.*

Exercice 100. *Soit* C *un convexe fermé non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* A *en dehors de* C*. Montrer qu'il existe un unique point* $M \in C$ *tel que* $AM = d(A, C)$*. C'est le théorème de* **projection sur un convexe***. En déduire qu'un convexe fermé de* $\mathbb{R}^2$ *différent de l'espace entier est inclus dans un demi-espace. On montrera qu'un hyperplan d'appui à un convexe n'intersecte pas l'intérieur de ce convexe.*

Exercice 101. ♠ *Si X est une partie d'un espace affine de dimension n, montrer que tout point de son enveloppe convexe est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de X. (On supposera que le point est barycentre de p points avec $p > n+1$ et on se ramènera à $p-1$ points.) En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est compacte.*

Exercice 102. *Déterminer les points extrémaux d'une boule, d'un triangle pour la norme euclidienne.*

Exercice 103. *Montrer que a est point extrémal de C si et seulement si $C \setminus a$ est encore convexe.*

Exercice 104. ♠*[Krein-Millman] Un convexe compact est enveloppe de ses points extrémaux :*
- *On considère le plus petit espace affine contenant C. Montrer que le résultat est vrai si sa dimension est un. On raisonne alors par récurrence.*
- *Soit m dans l'intérieur de C : considérez une droite passant par m. Montrez que l'intersection avec C est un intervalle dont les extrémités a, b sont sur la frontière de C.*
- *Montrer qu'il existe alors deux hyperplans d'appuis en ces points : H_a, H_b.*
- *Etudiez alors $H_a \cap C$: montrer que tout point extrémal de cet ensemble est extrémal pour C.*
- *Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence.*

Exercice 105. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $k \geq 2$. Montrer que toutes les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*

Exercice 106 (Helly)**.** ✠ *On se donne $n+2$ points de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'on peut les partitionner en deux ensembles dont les enveloppes convexes s'intersectent.*
On considère maintenant $n+2$ parties convexes tels que l'intersections de $n+1$ quelconques d'entre eux soit non vide. Montrer qu'il existe un point commun à tous les convexes.

Exercice 107. □ *Définition de polyèdre :*
Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. On note $v^\perp$ le plan orthogonal à v.

1. *Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus v^\perp$ possède deux composantes connexes appelés demi-espaces.*
2. *Si H est un plan affine, montrer que l'on peut aussi définir la notion de demi-espace.*
3. *En déduire qu'un* **polyèdre convexe** *est l'intersection de demi-espaces.*

6.2 Points extrémaux

Exercice 108. *Un tétraèdre est défini comme l'enveloppe convexe de 4 points non coplanaires. Montrer que ces 4 points sont les points extrémaux du tétraèdre (on raisonnera par l'absurde).*

Exercice 109. ✠

1) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques. Montrer que

$$(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr\,(AB)$$

est un produit scalaire.

2) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une B.O.N. $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une famille de réels $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^T.$$

3) Montrer que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 ssi il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $A = xx^T$ (comme d'habitude, on identifie des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à des vecteurs colonnes).

4) On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensembles des matrices symétriques positives. Soit $\Omega_1 := \{M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) : tr\, M = 1\}$.

a) Montrer que Ω_1 est un convexe compact de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\Omega_1 = co\{xx^T : ||x|| = 1\}$.

c) Montrer que les points extrémaux de Ω_1 sont les matrices xx^T, $||x|| = 1$.

7 Quadriques, coniques

Exercice 110. *On considère trois plans A, B, C non alignés du plan et soit M de coordonnées barycentriques (x, y, z) par rapport au repère A, B, C. Montrer que M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si*

$$p^2yz + q^2zx + r^2xy = 0$$

ou p, q, r sont les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

1. *On peut se restreindre au cas ou A, B, C sont sur le cercle unité.*
2. *Montrer alors que $p^2 = 2 - b\overline{c} - \overline{b}c$.*
3. *Calculer $|z|^2$ et conclure.*

Soit $f \in \mathbb{R}_2[X, Y]$ un polynôme de degré 2. **Une conique** est l'ensemble des points M du plan affine tels que dans un repère on ait $f(M) = 0$.

Exercice 111. □

1) Montrer que si f est un polynôme de degré 2, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_Ω et une constante c_Ω tels que

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + L_\Omega(\overrightarrow{\Omega M}) + c_\Omega. \tag{1}$$

Montrer que q ne dépend pas de Ω.

2) Calculer la différentielle de f en un point M_O de $\mathcal{E}$.

On pourra dorénavant prendre la formule (1) comme **définition d'une conique**. Une conique est **à centre** s'il existe un point Ω tel que M est sur la conique si et seulement si le symétrique de M par rapport à Ω est sur la conique.

Exercice 112. □

1) Soit $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ une conique. Montrer que Ω est un centre de la quadrique associée si et seulement si $2B(\overrightarrow{O\Omega}, \cdot) + L_O = 0$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée à q.

2) Montrer que Ω est un centre si et seulement si $L_\Omega = 0$.

3) Comment trouver les centres d'une quadrique si f est donné en coordonnées par

$$f(M) = \sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c_O.$$

Une conique est dite **propre** si la forme quadratique Q_0 est non dégénérée.

Exercice 113. *Montrer que cette définition est consistante : si $Q_O(u, z) = q(u) + L_O(u)z + c_Oz^2$ est non dégénérée, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, $Q_\Omega(u, z) = q(u) + L_\Omega(u)z + c_\Omega z^2$ est non dégénérée. On pourra remarquer que $Q_\Omega(u, z) = Q_O(u + z\overrightarrow{O\Omega}, z)$.*

7.1 Coniques

Exercice 114. □ *Les coniques suivantes, données dans un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 sont-elles à centre ? Sont-elles propres ? Dessinez les.*

i) $f(x,y) = xy$,
ii) $f(x,y) = x^2$,
iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,
iv) $f(x,y) = x^2 - y$.

Exercice 115. *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien.*

1) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'ellipse est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. En déduire qu'une ellipse est connexe, compacte.
2) Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'hyperbole est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\pm a ch t, b sh t)$. En déduire qu'une hyperbole possède deux composantes connexes non bornées.
3) Donner une paramétrisation d'une parabole. En déduire qu'une parabole est connexe, non bornée.

Exercice 116. □ *Dans le plan euclidien, décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par*

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 1, \\ xy + \lambda(x+y) + 1 = 0, \\ y^2 = \lambda \\ x^2 - 2x, \\ x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0 \end{cases}$$

Le cas échéant, on donnera les axes, sommets, paramètres.

Exercice 117. *Donner une expression explicite de la tangente à une conique propre, sous forme cartésienne, puis sous forme paramétrée. Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle coupe cette ellipse en un unique point (on pourra se ramener au cas du cercle). Cette propriété reste-t-elle vraie pour les hyperboles, paraboles ?*

Exercice 118. *Soit e, α des nombres réels avec $e > 0$. Identifier l'ensemble des points vérifiant en coordonnées polaires*

$$r = \frac{e}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Exercice 119. *Soit F un foyer de l'ellipse $\mathcal{C}$ et soit D la directrice correspondante. Si M est un point de $\mathcal{C}$, soit P le point d'intersection de la perpendiculaire à (MF) en F et de la droite D. Alors la droite (PM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M. (On rappelle que pour une ellipse, une droite est tangente si et seulement si elle a un unique point d'intersection avec l'ellipse). Même question lorsque $\mathcal{C}$ est une parabole.*

Exercice 120. *Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.*

1. *Si* $e = 1$*, montrer que c'est une parabole.*
2. *Si* $e < 1$*, montrer que c'est une ellipse.*
3. *Si* $e > 1$*, montrer que c'est une hyperbole.*

Exercice 121. *Montrer qu'un point est sur une ellipse si et seulement si* $MF + MF'$ *est constant. En déduire que la tangente à* M *à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle* FMF'*. On utilisera la définition avec foyer et directrice.*

Exercice 122. *Soient* F, F' *deux points, on considère l'ensemble des poins* M *tels qu'il existe un réel positif* a *vérifiant : le cercle de centre* M *passant par* F *est tangent au cercle de centre* F' *de rayon* $2a$*. Faire le lien avec la définition usuelle de conique.*

Exercice 123. ✠♠*[Théorème de Pascal] On considère un hexagone de sommets* A, B, C, D, E, F *et on définit les points* P, Q, R *comme intersection des droites* $(AE) - (DB)$ *;* $(AF) - (DC)$ *;* $((BF) - (EC)$*. Montrer que* P, Q, R *sont alignés si et seulement si l'hexagone est sur une ellipse : On considère un repère barycentrique défini par* A, B, C *:*
- *Calculer les équations des droites* (AE) *et* (DB)*.*
- *Trouver les coordonnées de* P, Q, R*.*
- *Donner une condition en termes de déterminant pour que* P, Q, R *soient alignés.*
- *Ecrire en terme de déterminant le fait que les points sont sur l'ellipse.*
- *Voir que les deux déterminants sont égaux.*

Exercice 124. ✠♠*[Ellipse de Steiner] On considère un triangle du plan. Soient* z_1, z_2, z_3 *les affixes des sommets, on pose* $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$*.*

1. *Montrer que les points d'affixes les racines de* P' *sont intérieurs au triangle.*
2. *Considérez le cas ou le triangle a pour isobarycentre l'origine et montrer alors que les milieux des côtés sont sur une ellipse de foyers les racines de* P'*. On posera un calcul en complexes en utilisant une propriété de l'ellipse.*
3. *Montrer que tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine. Quelle est l'image de cette ellipse ?*

Exercice 125. *Soit* σ *une permutation de* σ_3 *et* a, b, c *trois réels positifs tels que* $a + b + c = 1$*. Montrer que les barycentres de* $(1, \sigma(a)), (j, \sigma(b)), (j^2, \sigma(c))$ *sont sur un cercle.*

Exercice 126. *Soit* P *un polynôme réel de degré trois. On considère*

$$\{(x, y), P(x) = P(y)\}$$

1. *Montrer que cet ensemble est l'union d'une droite et d'une conique.*
2. *Trouver une CNS sur* P *pour que la conique soit une ellipse.*
3. *Dans ce cas trouver l'excentricité.*

Exercice 127. ✠ *Ecrire l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques et montrer qu'elle est toujours de la forme*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

Trouver l'équation de l'ellipse de Steiner, et de l'ellipse circonscrite au triangle.

Exercice 128. ✠ *Soit C un cône de $\mathbb{R}^3$ et P un plan, soit P' le plan parallèle à P passant par le sommet du cône. Montrer que*

- *$P \cap C$ est une ellipse si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à un point.*
- *$P \cap C$ est une parabole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à une droite.*
- *$P \cap C$ est une hyperbole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à deux droites.*

7.2 Résultant

Exercice 129. ✠ *Soit A un anneau factoriel et P, Q deux polynômes de $A[X]$ de degré respectif m et n strictement positifs. On note $P \wedge Q$ le pgcd de P et Q.*

1) *Montrer que $P \wedge Q$ est un polynôme non constant si et seulement si il existe deux polynômes U et V tels que $\deg U < n$, $\deg V < m$ et $UP + VQ = 0$.*
2) *On désigne par $A[X]_d$ le A module libre des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Soit f l'application A bilinéaire suivante :*

$$f : (U, V) \in A[X]_{n-1} \times A[X]_{m-1} \to UP + VQ \in A[X]_{m+n-1}$$

On appelle résultant de P et Q, et l'on note $Res(P, Q)$ le déterminant de l'application f calculée dans les bases

$$((X^{n-1}, 0), ..., (1, 0), (0, X^{m-1}), ..., (0, 1)) \quad \text{et} \quad (X^{m+n-1}, ..., 1).$$

Notons $P = p_m X^m + ... + p_0$ et $Q = q_n X^n + ... + q_0$. Montrer que

$$Res(P,Q) = \begin{vmatrix} p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 & & & \\ & p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & p_m & p_{m-1} & \cdots & & p_0 \\ q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & & \\ & q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & q_n & q_{n-1} & \cdots & & q_0 \end{vmatrix}.$$

Les n premières lignes sont construites à partir des coefficients de P, les m dernières à partir de ceux de Q. Les entrées non spécifiées sont nulles.

3) *Montrer que $P \wedge Q$ est un polynôme non constant si et seulement si $Res(P, Q) = 0$ (on pourra considérer le corps des fractions de A et l'application $\hat{f} : K[X]_{n-1} \times K[X]_{m-1} \to K[X]_{m+n-1}$ construite sur le modèle de f).*

Exercice 130. *Calculer le résultant $Res_Y(P, Q)$ des polynômes $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ par rapport à la variable Y (autrement dit, on considère P et Q comme des polynômes à coefficients dans $A = \mathbb{R}[X]$). En déduire comment trouver les points d'intersection des ellipses d'équation $P = 0$ et $Q = 0$.*

Exercice 131. *Donner l'équation implicite de la courbe paramétrée : $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 + t$. On pourra considérer les polynômes $X - T^2 - 1$ et $Y - T^2 - T$ et éliminer T.*

8 Espace projectif et inversions

8.1 sphère de Riemann

On note un élément de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ par $[z,t]$. On rappelle que cet espace est le quotient de $\mathbb{C}^2$ par la relation $(z,t) \sim (z',t') \Longleftrightarrow z = \lambda z'; t = \lambda t'$, avec λ complexe.

Exercice 132. *Montrer que l'application suivante entre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est injective*

$$g(x,y,z) = [x+iy, 1-z], z \neq 1$$

$$g(x,y,z) = [1+z, x-iy], z \neq -1$$

Exercice 133. *Montrer que l'application h vue comme application de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}(\sim \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$ donnée par*

$$h(z,t) = (\frac{2z\bar{t}}{|z|^2+|t|^2}, \frac{|z|^2-|t|^2}{|z|^2+|t|^2})$$

est à valeurs dans S^2 et que c'est la réciproque de l'application précédente.

On a donc trouvé une bijection entre $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et S^2.

Exercice 134. *On considère $\mathbb{R}^3$, le plan d'équation $z=0$ et la sphère S^2 de rayon un centrée à l'origine. Soit N le point $(0,0,1)$ et on identifie le plan $z=0$ avec $\mathbb{C}$. On définit alors la* **projection stéréographique** *par*

$$\phi : \begin{array}{ccc} S^2 \setminus N & \to & \mathbb{C} \\ M = (x,y,z) & \mapsto & M' \end{array}$$

M' est l'intersection de (MN) avec le plan. Montrer alors

1. *L'affixe de M' est égal à $\frac{x+iy}{1-z}$.*
2. *La fonction est une bijection que l'on peut étendre à S^2 en posant $\infty = \phi(N)$.*

On définit alors $\hat{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{C} \cup \infty$. C'est le **compactifié d'Alexandrov** ou aussi **la sphère de Riemann**.

Exercice 135. *Montrer que l'on peut mettre une topologie sur cet ensemble en posant U est un ouvert si et seulement si $\phi^{-1}(U)$ ouvert de S^2.*

Exercice 136. ✠ *Montrer en composant les applications précédentes que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1\mathbb{C} & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ (z_1,z_2) & \mapsto & z_1/z_2, \quad z_2 \neq 0 \\ (1,0) & \mapsto & \infty \end{array}$$

est un homéomorphisme entre les deux espaces.

8.2 Inversion et homographies

On appelle **cercle-droite** un ensemble du plan donné par l'équation

$$a|z|^2 - \omega\overline{z} - z\overline{\omega} = k$$

ou $a, k \in \mathbb{R}$. Remarquer que si $a = 0$ c'est une droite, sinon c'est un cercle.

On appelle **inversion** de centre Ω de puissance k^2 un application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$ qui envoie M sur M' défini par

- Ω, M, M' alignés.
- $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = k^2$

Exercice 137. *Montrer :*

1. *l'inversion préserve chaque point du cercle de centre Ω de rayon k.*
2. *C'est une bijection du plan privé de Ω.*

Exercice 138.

1. *Montrer que pour une inversion i et $z \in \mathbb{C}$ on a $i(z) = \omega + \frac{k^2}{z-\omega}$.*
2. *On peut la prolonger à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $i(\omega) = \infty, i(\infty) = \omega$.*

Exercice 139. ✠ *Montrer les propositions suivantes :*

- *L'image d'une droite passant par Ω est elle même.*
- *L'image d'une droite ne passant pas par Ω est un cercle passant par Ω.*
- *L'image d'un cercle passant par Ω est une droite ne passant pas par le centre.*
- *L'image d'un cercle ne passant pas est un cercle ne passant pas.*

Ainsi l'image d'un cercle-droite par une inversion est un cercle droite.

Exercice 140. *Soit i une inversion et M, N deux points du plan prouver que $M, N, i(M), i(N)$ sont alignés ou cocycliques. On pourra utiliser les propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle.*

Exercice 141. ♠ *Étudier l'application $i(z) = 2i + \frac{1}{z-2i}$. Faire de même avec $h(z) = \frac{z-1-i}{2z+3i}$.*

On appelle **homographie** une application définie sur $\hat{\mathbb{C}}$ de la forme :

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, h(\infty) = \frac{a}{c}, h(-d/c) = \infty$$

Exercice 142. *Monter que le cas $ad - bc = 0$ n'est pas très intéressant. En déduire que l'on peut se restreindre à $ad - bc = 1$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe de $SL_2(\mathbb{C})$ sur le groupe des homographies.*

Exercice 143. *Soit a, b, c trois points de $\hat{\mathbb{C}}$. Alors il existe une unique homographie f telle que*

$$f(a) = 0, f(b) = 1, f(c) = \infty$$

On dit qu'on a une **action 3-transitive du groupe des homographies sur la sphère de Riemann**.

Exercice 144. ✠ *Démontrer qu'une homographie conserve le birapport. On utilisera l'exercice précédent pour écrire le birapport de a, b, c, d.*

En déduire qu'une homographie envoie un cercle-droite sur un cercle droite.

Exercice 145. *Montrer qu'une homographie préserve les angles orientés.*

Exercice 146. *Montrer qu'une homographie différente de l'identité possède un ou deux points fixes.*
- *S'il n'y a qu'un point fixe égal à ∞ alors $f(z) = z + b$.*
- *Si f n'a qu'un point fixe alors f est conjuguée à une translation.*
- *Si f a deux points fixes alors elle est conjuguée à $z \mapsto az$.*

Exercice 147. *On considère $\mathbb{H}$ l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire positive.*

1. *Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ agit sur cet ensemble.*
2. *Trouver le stabilisateur de i.*
3. *En déduire que $\mathbb{H} \sim SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.*

9 Références

Quelques livres classiques :

- M. Audin : "Géométrie" et "125 exercices de géométrie" (Page web).
- M. Berger : "Géométrie"+ "Géométrie vivante".
- P. Caldero et J. Germoni : " Histoires hédonistes de groupes et géométries".
- R. Deltheil-D. Caire : "Géométrie : transformations, coniques".
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas "Exercices de mathématiques".
- J. Fresnel : "Méthodes modernes en géométrie".
- R. Goblot : "Thèmes de géométrie".
- Y. Ladegaillerie : "Géométrie affine et projective".