

Exercices de géométrie
Agrégation externe 2015-2016

N. Bédaride

Table des matières

1	Isométries dans l'espace de dimension trois	2
2	Polyèdres et groupes d'isométries	3
2.1	Autour du tétraèdre	4
2.2	Groupes d'isométries	5
3	Coniques	8
3.1	Définitions	8
3.2	Propriétés	9
3.3	Utilisation du résultant	11
4	Espace projectif et inversions	11
4.1	Sphère de Riemann	11
4.2	Inversion et homographies	12
5	Références	14

Les exercices marqués d'un \square sont simples, ceux marqués d'un \boxtimes sont plus complexes et ceux marqués d'un \spadesuit peuvent faire l'objet d'un développement.

1 Isométries dans l'espace de dimension trois

Exercice 1. \spadesuit Si f est une isométrie d'un espace affine de dimension n , montrer qu'il existe un unique couple (g, u) où u est un vecteur de l'espace vectoriel et g une isométrie ayant au moins un point fixe tels que $f = t_u \circ g = g \circ t_u$.

1. Montrer que si A est un endomorphisme orthogonal, alors le noyau de $A - Id$ est égal à l'orthogonal de l'image de $A - Id$.
2. En déduire un u qui convient puis g .
3. Supposons que la décomposition n'est pas unique, dans quel espace se trouve $u - v$?
4. Conclure en prouvant que u, g commutent.

Exercice 2. \square Soient u_1, u_2, v_1, v_2 des vecteurs unitaires dans \mathbb{R}^3 tels que $\|u_1 - u_2\| = \|v_1 - v_2\|$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.

Exercice 3. \square Montrer qu'une rotation est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant l'axe de la rotation. De plus l'un des deux plans peut être pris de manière arbitraire.

Exercice 4. Soient ϕ et ψ deux rotations affines dans l'espace euclidien de dimension 3. Quand l'angle de $\psi \circ \phi$ est-il la somme des angles des deux rotations ?

Exercice 5. Quelle est la composée de 3 réflexions orthogonales de plans parallèles ?

Exercice 6. Décrire la composée de 3 réflexions de plans orthogonaux deux à deux.

Exercice 7. Dans \mathbb{R}^3 orienté, on note s_P la réflexion vectorielle de plan P .

- 1) Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour (par rapport à quelle droite ?)
- 2) Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de deux demi-tours est-elle un demi-tour ?
- 3) Montrer que $SO(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $SO(3)$.

Exercice 8. \boxtimes On note ρ_1 et ρ_2 deux rotations affines de \mathbb{R}^3 et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, montrer que :

1. Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.
2. Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque rotation en produit de réflexions par rapport à des plans bien choisis).
3. Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segment $[O, \rho_2(O)]$).

Exercice 9. Soit R une rotation vectorielle d'angle θ et d'axe dirigé par u . Posons $\omega = \sin(\theta/2)u = (b, c, d)$ et $a = \cos(\theta/2)$. Montrer que pour tout vecteur x on a

$$R(x) = x + 2a\omega \wedge x + 2\omega \wedge (\omega \wedge x)$$

Exercice 10. ♠ On veut montrer que $SO(3)$ est simple, i.e. ses seuls sous-groupes distingués sont les sous-groupes triviaux $SO(3)$ et $\{Id\}$. Soit donc N un sous-groupe distingué de $SO(3)$. On suppose $N \neq \{Id\}$ et on veut montrer que $SO(3) = N$.

- 1) Vérifier qu'il suffit de montrer que N contient un demi-tour.
- 2) Montrer qu'on peut supposer que N contient une rotation f d'angle $\theta \in]0, \pi[$. Soient a un vecteur unitaire dirigeant l'axe de f , x un vecteur unitaire orthogonal à a et $y = f(x)$. Soit $d = \|x - y\|$. Montrer que $\forall m \in [0, d]$, il existe x_1 unitaire tel que $\|f(x_1) - x_1\| = m$. On note $x_2 = f(x_1)$.
- 3) Fixons $m \in [0, d]$. Soient y_1, y_2 unitaires tels que $\|y_1 - y_2\| = m$. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(x_1) = y_1, r(x_2) = y_2$. En déduire qu'il existe $g \in N$ tel que $g(y_1) = y_2$.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et ρ_n la rotation d'axe a et d'angle $\frac{\pi}{n}$ avec n assez grand pour que $\|x - \rho_n(x)\| \leq d$. Soient $x_0 = x, x_1 = \rho_n(x), \dots, x_{i+1} = \rho_n(x_i), \dots$
 - Que vaut x_n ?
 - Montrer qu'il existe une rotation $u_i \in N$ telle que $u_i(x_i) = x_{i+1}$.
 - Soit $\nu = u_{n-1} \circ \dots \circ u_1 \circ u_0$. Que vaut $\nu(x)$?
 - Montrer que ν est un demi-tour et que ν est dans N .
 - Conclure.

Exercice 11. ✕ Cet exercice est tiré du sujet de 1998. Supposons qu'il existe une partition du plan affine euclidien en cercles de rayons non nuls : $(C_i)_{i \in I}$. On notera D_i le disque de bord C_i

1. Montrer qu'il existe une suite $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que

$$D_{i_{n+1}} \subset D_{i_n}, \quad r_{i_{n+1}} \leq \frac{r_{i_n}}{2}$$

On pourra considérer le centre de D_i .

2. En déduire que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} D_{i_n}$ est réduite à un point.
3. Conclure à une contradiction.

Maintenant on se place dans l'espace affine euclidien de dimension trois.

1. Montrer qu'une sphère privée de deux points admet une partition en cercles.
2. Soit D une droite et 0 un point dessus. Montrer que les cercles de rayon un centrés en $0_m \in D$ avec $OO_m = 4m + 1, m \in \mathbb{Z}$ vérifient :
 - Ils sont deux à deux disjoints.
 - Toute sphère de centre 0 coupe la famille de ces cercles en exactement deux points.
3. En combinant les deux questions trouver une partition de l'espace en cercles.

2 Polyèdres et groupes d'isométries

Exercice 12.

1. Rappeler la définition d'un simplexe de dimension $d \leq 3$.
2. Définir un polyèdre comme union de simplexes.
3. Trouver une décomposition du cube comme union de simplexes.
4. Qu'apporte l'hypothèse supplémentaire $P = \overline{P^\circ}$?

Exercice 13. ✕ Soit v un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 , on définit

$$H_v = \{y \in \mathbb{R}^3, \langle v, y \rangle = 1\}$$

$$H_v^+ = \{y \in \mathbb{R}^3, \langle v, y \rangle \leq 1\}$$

1. Soit P un polyèdre d'isobarycentre l'origine, et $v_1 \dots v_k$ sont les sommets de P , montrer alors que $\bigcap_{i \leq k} H_{v_i}^+$ est un polyèdre. On montrera qu'il est compact par l'absurde. C'est le **polyèdre dual** de P , noté P^* .
2. Montrer qu'une face de P^* est de la forme H_v pour un v particulier..
3. Caractériser une arête du polyèdre dual.
4. Montrer que les sommets de P^* sont les centres des faces de P .

Exercice 14. Trouver le dual du tétraèdre, du cube, de l'icosaèdre.

Exercice 15. On considère dans le plan une partie X bornée connexe formée d'union de polygones telle que deux polygones s'intersectent suivant une arête ou un sommet et que pour tout polygone il existe un polygone de X (différent) qui l'intersecte suivant une arête. On note S, A, F le nombre de sommets, d'arêtes et de faces.

1. Montrer que si l'on triangularise X alors $S - A + F$ est constant.
2. Donner une définition du bord de X .
3. Montrer que $S - A + F$ est constant si on effectue une des deux opérations :
 - On enlève un triangle de X ayant un sommet sur le bord.
 - On enlève un triangle de X ayant une arête sur le bord.
4. En déduire que $S - A + F = 2$.

Exercice 16. Soit P un polyèdre convexe, on note S, A, F le nombre de sommets, d'arêtes et de faces.

1. On considère G l'isobarycentre de P et $R > 0$. On considère alors la projection centrale de centre G sur la sphère de rayon R de centre G . Montrer que pour R grand la projection de P est un ensemble homéomorphe au X de l'exercice précédent.
2. Montrer que $S - A + F = 2$. C'est la **formule d'Euler**.
3. Trouver un polyèdre où la formule est fausse.
4. Reprendre la première question en projetant P sur un plan contenant une face de P et en agrandissant la face.

2.1 Autour du tétraèdre

Exercice 17. □ Montrer que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leur milieu.

Exercice 18. Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné A_4 . Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G .

Exercice 19. Par définition, un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les côtés sont isométriques (autrement dit, c'est l'enveloppe convexe de quatre points A_1, \dots, A_4 tels qu'il existe $a > 0$ vérifiant : pour tout $i \neq j$, $\|\vec{A_i A_j}\| = a$).

Le jury a posé en 2008 la question suivante : est-ce qu'un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire est nécessairement régulier ?

1. Dans un plan de \mathbb{R}^3 , on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $CA(=CB) > AB$. On cherche l'ensemble des points $D \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$DA = DB = CA = CB \text{ et } DC = AB.$$

Montrer que cet ensemble est à l'intersection de deux cercles.

2. En déduire qu'il existe un tétraèdre non régulier avec des faces isométriques. Supposons maintenant que $ABCD$ soit un tétraèdre avec des faces de même aire.
3. Soient I, J les pieds sur (AB) et (CD) de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD) . Montrer que

$$\begin{aligned} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|^2 &= \|\vec{AB} \wedge \vec{IJ}\|^2 + \|\vec{AB} \wedge \vec{JC}\|^2, \\ \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|^2 &= \|\vec{AB} \wedge \vec{IJ}\|^2 + \|\vec{AB} \wedge \vec{JD}\|^2. \end{aligned}$$

4. En déduire une égalité de longueur.
5. Montrer que les faces du tétraèdre sont isométriques (on pourra considérer le retournement autour de la droite (IJ)).

2.2 Groupes d'isométries

Exercice 20. Trouver le groupe d'isométries préservant la courbe $y = \sin x$. On écrira la forme générale d'une isométrie du plan.

Exercice 21. Trouver le groupe d'isométries préservant l'astroïde donnée par

$$\begin{cases} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi[.$$

Exercice 22. Trouver les isométries préservant une hélice circulaire.

Exercice 23. Soit A une partie finie de \mathbb{R}^2 . Montrer que $Is(A) \subset SO(2)$ si et seulement si A n'admet pas d'axe de symétrie. Est-ce vraie si A est infinie ?

Exercice 24. Trouver une partie du plan dont le groupe d'isométries est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indications :

- Soit r une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ centrée à l'origine et B un segment ne passant pas par l'origine. Considérer $\bigcup r^k(B)$.
- Montrer que cet ensemble n'est pas invariant par une autre rotation.
- Montrer qu'il n'est pas invariant par une symétrie axiale ne passant pas par l'origine.
- Ajuster B .

Exercice 25. ♠✂ Soit G un sous groupe fini de $SO(3)$.

1. A chaque élément de G différent de l'identité on lui associe son axe et les deux points sur la sphère unité. Montrer que G agit sur cet ensemble X : Si P est un pôle fixe par g , on regardera le pôle fixé par gh^{-1} .
2. On note s le nombre d'orbites et ν_i le cardinal du stabilisateur de chaque orbite. En calculant le cardinal de $\{(g, x) \in (G, X), g.x = x\}$ de deux façons montrer que le nombre d'orbites vaut

$$s = \frac{1}{|G|} \sum_g |Fix(g)| \quad \text{Formule de Burnside.}$$

3. En déduire une relation entre s , $|G|$ et le cardinal de X . Montrer alors :

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right).$$

4. Montrer que s vaut 2 ou 3.
5. Si $s = 2$, en déduire que G stabilise une droite. Conclure que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
6. On suppose maintenant que G ne stabilise aucune droite. Montrer que $s = 3$.
7. On suppose alors $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$.
8. Montrer que ν_2 vaut 2 ou 3.
9. Si $\nu_2 = 2$, alors
 - Montrer que dans ce cas, on a $|G| = 2n$ avec $\nu_3 = n$. Notons x un pôle de l'orbite O_3 .
 - Considérer G_x montrer que ce groupe est cyclique, notons a son générateur. Vérifier que a fixe deux pôles.
 - Trouver s dans $G \setminus G_x$ tel que $s(x) = -x$.
 - Décrire s^2 et en déduire que s , a génèrent G . Conclure.
10. Supposons donc $\nu_2 = 3$. Montrer que $\nu_1 = 2$ et que $\nu_3 = 3$.
11. En déduire que les seules possibilités pour $|G|$ et les ν_i sont

$$(12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5).$$

Exercice 26. ♠ On considère un tétraèdre régulier, et $Is(T)$ son groupe d'isométries.

1. Montrer que si f est une isométrie préservant T , alors l'ensemble des points extrémaux est globalement invariant.
2. Construire un morphisme de groupe de $Is(T)$ dans \mathfrak{S}_4 .
3. Montrer qu'il est injectif.
4. Construire une isométrie dont l'image par le morphisme soit une transposition.
5. En déduire $Is(T)$.

Exercice 27. Montrer que \mathcal{A}_4 est le seul sous groupe d'indice deux de \mathfrak{S}_4 . En déduire $Is^+(T)$.

Exercice 28. ♠ On considère un cube C .

1. En étudiant les diagonales des faces, montrer qu'il existe deux tétraèdres réguliers inscrits dans ce cube ayant deux faces parallèles.

2. Soit s_0 la symétrie centrale par rapport au centre du cube. Montrer que s_0 commute avec tous les éléments de $Is(C)$.
3. En déduire l'existence d'une application de $Is(C)$ dans $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (On utilisera un exercice précédent).
4. Montrer que c'est un morphisme, puis un isomorphisme.
5. Trouver une isométrie positive du cube dont l'image par le morphisme soit de la forme $(\tau, 0)$ ou τ est une transposition.
6. En déduire que $Is^+(C)$ contient un sous groupe isomorphe à \mathfrak{S}_4 et qu'il est d'indice deux dans $Is(C)$. Conclure.

Exercice 29. ✕ Soit P un polyèdre et $Is(P)$ son groupe d'isométries. Montrer que $Is(P)$ est produit direct de $Is^+(P)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe une symétrie centrale dans $Is(P)$. On définira une application de $Is(P)$ dans le produit en utilisant la symétrie centrale. Remarquez qu'en dimension deux le résultat est faux car la symétrie centrale est un déplacement.

Exercice 30. ✕ On considère un polyèdre dont les sommets sont donnés par

$$(0, \pm\varphi, \pm 1)$$

ainsi que les permutés cycliques.

1. Montrer que les arêtes ont pour longueur 2.
2. Montrer que les sommets se répartissent sur 5 plans, avec 2 plans ne contenant qu'un sommet.
3. Montrer qu'il existe un centre de symétrie.
4. Montrer que cela définit un polyèdre à 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces.

C'est l'icosaèdre régulier.

Exercice 31. ✕♠ On considère un icosaèdre régulier. On va montrer que $Is^+(I)$ est isomorphe à \mathcal{A}_5 .

1. On considère une droite passant par les centres de deux faces opposées. Montrer qu'il existe deux rotations dans $Is(I)$ autour de cet axe et d'angles $\pm 2\pi/3$.
2. Montrer que ceci partitionne les sommets en quatre triangles équilatéraux 2 à 2 semblables.
3. On considère une droite passant par deux sommets opposés. Montrer qu'il existe deux rotations dans $Is(I)$ de cet axe et d'angles $k\pi/5$.
4. On considère une droite passant par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que cela définit une rotation d'angle π dans $Is(I)$.
5. Montrer qu'elles commutent toutes et que chacune partitionne les sommets en trois sous ensembles de 4 sommets chacun lié à une droite particulière.
6. Comptez le nombre de rotations obtenues. Montrer qu'un élément de $Is^+(I)$ est forcément de cette forme. Conclure avec un exercice précédent.

3 Coniques

3.1 Définitions

Exercice 32. On considère trois plans A, B, C non alignés du plan et soit M de coordonnées barycentriques (x, y, z) par rapport au repère A, B, C . Montrer que M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si

$$p^2yz + q^2zx + r^2xy = 0$$

ou p, q, r sont les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC .

1. On peut se restreindre au cas où A, B, C sont sur le cercle unité.
2. Montrer alors que $p^2 = 2 - b\bar{c} - \bar{b}c$.
3. Calculer $|z|^2$ et conclure.

Soit $f \in \mathbb{R}_2[X, Y]$ un polynôme de degré 2. **Une conique** est l'ensemble des points M du plan affine tels que dans un repère on ait $f(M) = 0$.

Exercice 33. \square

- 1) Montrer que si f est un polynôme de degré 2, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique non nulle q , une forme linéaire L_Ω et une constante c_Ω tels que

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + L_\Omega(\overrightarrow{\Omega M}) + c_\Omega. \quad (1)$$

Montrer que q ne dépend pas de Ω .

- 2) Calculer la différentielle de f en un point M_O de \mathcal{E} .

On pourra dorénavant prendre la formule (1) comme **définition d'une conique**. Une conique est **à centre** s'il existe un point Ω tel que M est sur la conique si et seulement si le symétrique de M par rapport à Ω est sur la conique.

Exercice 34. \square

- 1) Soit $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ une conique. Montrer que Ω est un centre de la conique associée si et seulement si $2B(\overrightarrow{O\Omega}, \cdot) + L_O = 0$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée à q .
- 2) Montrer que Ω est un centre si et seulement si $L_\Omega = 0$.
- 3) Comment trouver les centres d'une quadrique si f est donné en coordonnées par

$$f(M) = \sum a_{ij}x_i x_j + \sum b_i x_i + c_O.$$

Une conique est dite **propre** si la forme quadratique Q_0 est non dégénérée.

Exercice 35. Montrer que cette définition est consistante : si $Q_O(u, z) = q(u) + L_O(u)z + c_O z^2$ est non dégénérée, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, $Q_\Omega(u, z) = q(u) + L_\Omega(u)z + c_\Omega z^2$ est non dégénérée. On pourra remarquer que $Q_\Omega(u, z) = Q_O(u + z\overrightarrow{O\Omega}, z)$.

Exercice 36. Montrer qu'un point (x, y) est sur une conique si et seulement si il existe une matrice B telle que l'on ait

$$(x \ y \ 1) B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Trouver l'expression de B .

3.2 Propriétés

Exercice 37. \square Les coniques suivantes, données dans un repère affine d'un espace affine \mathcal{E} de dimension 2 sont-elles à centre ? Sont-elles propres ? Dessinez les.

- i) $f(x, y) = xy$,
- ii) $f(x, y) = x^2$,
- iii) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,
- iv) $f(x, y) = x^2 - y$.

Exercice 38. Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien.

- 1) Soit \mathcal{E} une ellipse. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'ellipse est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$. En déduire qu'une ellipse est connexe, compacte.
- 2) Soit \mathcal{H} une hyperbole. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'hyperbole est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\pm a \cosh t, b \sinh t)$. En déduire qu'une hyperbole possède deux composantes connexes non bornées.
- 3) Donner une paramétrisation d'une parabole. En déduire qu'une parabole est connexe, non bornée.

Exercice 39. \square Dans le plan euclidien, décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x + y) = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 1, \\ xy + \lambda(x + y) + 1 = 0, \\ y^2 = \lambda \\ x^2 - 2x, \\ x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0 \end{cases}$$

Le cas échéant, on donnera les axes, sommets, paramètres.

Exercice 40. Donner une expression explicite de la tangente à une conique propre, sous forme cartésienne, puis sous forme paramétrée. Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle coupe cette ellipse en un unique point (on pourra se ramener au cas du cercle). Cette propriété reste-t-elle vraie pour les hyperboles, paraboles ?

Exercice 41. Soit e, α des nombres réels avec $e > 0$. Identifier l'ensemble des points vérifiant en coordonnées polaires

$$r = \frac{e}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}.$$

Exercice 42. Soit F un foyer de l'ellipse \mathcal{C} et soit D la directrice correspondante. Si M est un point de \mathcal{C} , soit P le point d'intersection de la perpendiculaire à (MF) en F et de la droite D . Alors la droite (PM) est tangente à \mathcal{C} en M . (On rappelle que pour une ellipse, une droite est tangente si et seulement si elle a un unique point d'intersection avec l'ellipse). Même question lorsque \mathcal{C} est une parabole.

Exercice 43. Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.

1. Si $e = 1$, montrer que c'est une parabole.
2. Si $e < 1$, montrer que c'est une ellipse.
3. Si $e > 1$, montrer que c'est une hyperbole.

Exercice 44. On considère une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et de foyers F, F' . Soient les deux nombres $r = MF, r' = MF'$ et

$$f(M) = (r + r' + 2a)(r + r' - 2a)(r - r' + 2a)(r - r' - 2a)$$

1. Montrer que $r - r' - 2a$ ne peut être nul.
2. En déduire que $f(M) = 0$ si et seulement si $r + r' = 2a$.
3. Calculer $f(M)$.
4. En déduire qu'un point est sur l'ellipse si et seulement si $MF + MF' = 2a$.
5. En déduire que la tangente à M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle FMF' .

Exercice 45. On considère un cylindre coupé par un plan. Soient S, S' deux sphères intérieures au cylindre et tangentes à celui-ci. On suppose qu'elles sont de part et d'autre du plan et tangentes à celui-ci en deux points. Montrer que ces points sont les foyers de l'ellipse.

Exercice 46. Soient F, F' deux points, on considère l'ensemble des points M tels qu'il existe un réel positif a vérifiant : le cercle de centre M passant par F est tangent au cercle de centre F' de rayon $2a$. Faire le lien avec la définition usuelle de conique.

Exercice 47. ♣♠/[Théorème de Pascal] On considère un hexagone de sommets A, B, C, D, E, F et on suppose que les points P, Q, R définis comme intersection des droites $(AE) - (DB)$; $(AF) - (DC)$; $((BF) - (EC))$ existent. Montrer que P, Q, R sont alignés si et seulement si l'hexagone est sur une conique :

Pour cela on considère un repère barycentrique défini par A, B, C :

- Calculer les équations des droites (AE) et (DB) .
- Trouver les coordonnées de P, Q, R .
- Donner une condition en termes de déterminant pour que P, Q, R soient alignés.
- Ecrire en terme de déterminant le fait que les points sont sur une même conique.
- Voir que les deux déterminants sont égaux.

Exercice 48. Soit E une ellipse de foyer F_1, F_2 et M extérieur à l'ellipse. On considère les deux tangentes à l'ellipse issue de M . Montrer que

$$(MT_1, MF_1) = (MF_2, MT_2).$$

1. On considère $\sigma_{MF_1} \circ \sigma_{MT_1}$ produit des symétries orthogonales par rapport aux deux droites.
2. Calculer l'image l'image du symétrique de F_1 par rapport à (MT_1) .
3. Montrer que ce point est aligné avec T_1, F_2 .
4. Conclure grâce à une propriété de la tangente de l'ellipse.

Exercice 49. ♣♠/[Théorème de Marden] On considère un triangle ABC du plan. Soient z_1, z_2, z_3 les affixes des sommets, on pose $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

1. Montrer que les points F, G d'affixes les racines de P' sont intérieurs au triangle.
2. Montrer qu'on a égalité entre les angles (AF, AB) et (AC, AG) .
3. Considérer l'ellipse de foyers F, G tangente à (AB) . Montrer qu'elle est tangente aux autres côtés du triangle.
4. Montrer que tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine. Quelle est l'image de cette ellipse ?
5. Conclure que l'ellipse passe par les milieux des côtés.

Exercice 50. Soit σ une permutation de σ_3 et a, b, c trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que les barycentres de $(1, \sigma(a)), (j, \sigma(b)), (j^2, \sigma(c))$ sont sur un cercle.

Exercice 51. Soit P un polynôme réel de degré trois. On considère

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = P(y)\}$$

1. Montrer que cet ensemble est l'union d'une droite et d'une conique.
2. Trouver une CNS sur P pour que la conique soit une ellipse.
3. Dans ce cas trouver l'excentricité.

Exercice 52. ✂ Écrire l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques et montrer qu'elle est toujours de la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

Trouver l'équation de l'ellipse de Steiner, et de l'ellipse circonscrite au triangle.

Exercice 53. ✂ Soit C un cône de \mathbb{R}^3 et P un plan, soit P' le plan parallèle à P passant par le sommet du cône. Montrer que

- $P \cap C$ est une ellipse si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à un point.
- $P \cap C$ est une parabole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à une droite.
- $P \cap C$ est une hyperbole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à deux droites.

3.3 Utilisation du résultant

Exercice 54. Calculer le résultant $\text{Res}_Y(P, Q)$ des polynômes $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ par rapport à la variable Y (autrement dit, on considère P et Q comme des polynômes à coefficients dans $A = \mathbb{R}[X]$). En déduire comment trouver les points d'intersection des ellipses d'équation $P = 0$ et $Q = 0$.

Exercice 55. Donner l'équation implicite de la courbe paramétrée : $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t^2 + t$. On pourra considérer les polynômes $X - T^2 - 1$ et $Y - T^2 - T$ et éliminer T .

4 Espace projectif et inversions

4.1 Sphère de Riemann

On note un élément de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ par $[z, t]$. On rappelle que cet espace est le quotient de \mathbb{C}^2 par la relation $(z, t) \sim (z', t') \iff z = \lambda z'; t = \lambda t'$, avec λ complexe.

Exercice 56. Montrer que l'application suivante entre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est injective

$$g(x, y, z) = [x + iy, 1 - z], z \neq 1$$

$$g(x, y, z) = [1 + z, x - iy], z \neq -1$$

Exercice 57. On considère l'application h vue comme application de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}(\sim \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$ donnée par

$$h(z, t) = \left(\frac{2z\bar{t}}{|z|^2 + |t|^2}, \frac{|z|^2 - |t|^2}{|z|^2 + |t|^2} \right)$$

1. Montrer que h est à valeurs dans S^2 .
2. Calculer $h \circ g$. En déduire que h est surjective.
3. En déduire que c'est la réciproque de l'application précédente.

On a donc trouvé une bijection entre $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et S^2 .

Exercice 58. On considère \mathbb{R}^3 , le plan d'équation $z = 0$ et la sphère S^2 de rayon un centrée à l'origine. Soit N le point $(0, 0, 1)$ et on identifie le plan $z = 0$ avec \mathbb{C} . On définit alors la **projection stéréographique** par

$$\phi: \begin{array}{ccc} S^2 \setminus N & \rightarrow & \mathbb{C} \\ M = (x, y, z) & \mapsto & M' \end{array}$$

M' est l'intersection de (MN) avec le plan. Montrer alors

1. L'affixe de M' est égal à $\frac{x+iy}{1-z}$.
2. La fonction est une bijection que l'on peut étendre à S^2 en posant $\infty = \phi(N)$.

On définit alors $\hat{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{C} \cup \infty$. C'est le **compactifié d'Alexandrov** ou aussi **la sphère de Riemann**.

Exercice 59. Montrer que l'on peut mettre une topologie sur cet ensemble en posant U est un ouvert si et seulement si $\phi^{-1}(U)$ ouvert de S^2 .

Exercice 60. ✂ Montrer en composant les applications précédentes que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1\mathbb{C} & \rightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1/z_2, \quad z_2 \neq 0 \\ (1, 0) & \mapsto & \infty \end{array}$$

est un homéomorphisme entre les deux espaces.

4.2 Inversion et homographies

On appelle **cercle-droite** un ensemble du plan donné par l'équation

$$a|z|^2 - \omega\bar{z} - z\bar{\omega} = k$$

ou $a, k \in \mathbb{R}$. Remarquer que si $a = 0$ c'est une droite, sinon c'est un cercle.

On appelle **inversion** de centre Ω de puissance k^2 un application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{\Omega\}$ qui envoie M sur M' défini par

- Ω, M, M' alignés.
- $\frac{\Omega M}{\Omega M'} = k^2$

Exercice 61. *Montrer :*

1. *L'inversion préserve chaque point du cercle de centre Ω de rayon k .*
2. *C'est une bijection du plan privé de Ω .*

Exercice 62.

1. *Montrer que pour une inversion i et $z \in \mathbb{C}$ on a $i(z) = \omega + \frac{k^2}{z-\omega}$.*
2. *On peut la prolonger à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $i(\omega) = \infty, i(\infty) = \omega$.*

Exercice 63. ✂ *Montrer les propositions suivantes :*

- *L'image d'une droite passant par Ω est elle-même.*
 - *L'image d'une droite ne passant pas par Ω est un cercle passant par Ω .*
 - *L'image d'un cercle passant par Ω est une droite ne passant pas par le centre.*
 - *L'image d'un cercle ne passant pas par Ω est un cercle ne passant pas le centre.*
- Pour les deux dernières question on montrera qu'une inversion est une involution.*

Ainsi l'image d'un cercle-droite par une inversion est un cercle droite.

Exercice 64. *Soit i une inversion et M, N deux points du plan prouver que $M, N, i(M), i(N)$ sont alignés ou cocycliques. On pourra utiliser les propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle.*

Exercice 65. ♠ *Étudier l'application $i(z) = 2i + \frac{1}{z-2i}$. Faire de même avec $h(z) = \frac{z-1-i}{2z+3i}$.*

On appelle **homographie** une application définie sur $\hat{\mathbb{C}}$ de la forme :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}, h(\infty) = \frac{a}{c}, h(-d/c) = \infty$$

Exercice 66. *Monter que le cas $ad - bc = 0$ n'est pas très intéressant. En déduire que l'on peut se restreindre à $ad - bc = 1$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe de $SL_2(\mathbb{C})$ sur le groupe des homographies.*

Exercice 67. *Soit a, b, c trois points de $\hat{\mathbb{C}}$.*

1. *Montrer qu'il existe une unique homographie f telle que*

$$f(a) = \infty, f(b) = 0, f(c) = 1$$

L'image de d s'appelle le birapport de a, b, c, d .

2. *En déduire que le birapport de 4 complexes est réel si et seulement si les 4 points sont cocycliques ou alignés.*

On dit qu'on a une **action 3-transitive du groupe des homographies sur la sphère de Riemann.**

Exercice 68. ✂

1. Démontrer qu'une homographie conserve le birapport. On utilisera l'exercice précédent pour écrire le birapport de a, b, c, d .
2. En déduire qu'une homographie envoie un cercle-droite sur un cercle droite.

Exercice 69. Montrer qu'une homographie préserve les angles orientés.

Exercice 70. Montrer qu'une homographie différente de l'identité possède un ou deux points fixes.

- S'il n'y a qu'un point fixe égal à ∞ alors $f(z) = z + b$.
- Si f n'a qu'un point fixe alors f est conjuguée à une translation.
- Si f a deux points fixes alors elle est conjuguée à $z \mapsto az$.

Exercice 71. Soit H une application \mathbb{C} linéaire, bijective sur \mathbb{C}^2 .

1. Montrer que cette application définit une application de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dans lui même.
2. Soit \mathcal{H} l'ensemble de ces applications. Montrer que cet ensemble possède une structure de groupe. Montrer qu'il est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{C})$.
3. Montrer que ce groupe est engendré par les similitudes directes et par $z \mapsto \frac{1}{z}$.
4. Faire le lien avec l'exercice précédent en réduisant H .

Exercice 72. Soit $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ un birapport. On considère l'action de \mathfrak{S}_4 sur cet ensemble.

1. Montrer que cela définit six nombres complexes (et pas 24).
2. Exprimer ces nombres en fonction de λ .
3. Montrer que cet ensemble vu comme ensemble d'homographies est un groupe isomorphe à \mathfrak{S}_3 .
4. Trouver les permutations qui préservent le birapport.
5. En déduire que le noyau de l'action est isomorphe au groupe de Klein.

Exercice 73. On considère \mathbb{H} l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire positive.

1. Montrer que $SL_2(\mathbb{R})$ agit sur cet ensemble.
2. Trouver le stabilisateur de i .
3. En déduire que $\mathbb{H} \sim SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.

5 Références

Quelques livres classiques :

- M. Audin : "Géométrie" et "125 exercices de géométrie" (Page web).
- M. Berger : "Géométrie" + "Géométrie vivante".
- P. Caldero et J. Germoni : "Histoires hédonistes de groupes et géométries".
- R. Deltheil-D. Caire : "Géométrie : transformations, coniques".
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas "Exercices de mathématiques".
- J. Fresnel : "Méthodes modernes en géométrie".
- R. Goblot : "Thèmes de géométrie".
- Y. Ladegaillerie : "Géométrie affine et projective".
- R. Vidonne : "Groupe circulaire, rotation et quaternion."