Exercices de géométrie
Agrégation externe 2015-2016

N. Bédaride

Table des matières

Les exercices marqués d'un □ sont simples, ceux marqués d'un ✠ sont plus complexes et ceux marqués d'un ♠ peuvent faire l'objet d'un développement.

1 Isométries dans l'espace de dimension trois

Exercice 1. ♠ *Si f est une isométrie d'un espace affine de dimension n, montrer qu'il existe un unique couple (g,u) ou u est un vecteur de l'espace vectoriel et g une isométrie ayant au moins un point fixe tels que $f = t_u \circ g = g \circ t_u$.*

1. *Montrer que si A est un endomorphisme orthogonal ,alors le noyau de $A - Id$ est égal à l'orthogonal de l'image de $A - Id$.*
2. *En déduire un u qui convient puis g.*
3. *Supposons que la décomposition n'est pas unique, dans quel espace se trouve $u - v$?*
4. *Conclure en prouvant que u, g commutent.*

Exercice 2. □ *Soient u_1, u_2, v_1 v_2 des vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$ tels que $||u_1 - u_2|| = ||v_1 - v_2||$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.*

Exercice 3. □ *Montrer qu'une rotation est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant l'axe de la rotation. De plus l'un des deux plans peut être pris de manière arbitraire.*

Exercice 4. *Soient ϕ et ψ deux rotations affines dans l'espace euclidien de dimension 3. Quand l'angle de $\psi \circ \phi$ est-il la somme des angles des deux rotations ?*

Exercice 5. *Quelle est la composée de 3 réflexions orthogonales de plans parallèles ?*

Exercice 6. *Décrire la composée de 3 réflexions de plans orthogonaux deux à deux.*

Exercice 7. *Dans $\mathbb{R}^3$ orienté, on note s_P la réflexion vectorielle de plan P.*

1) *Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour (par rapport à quelle droite ?)*
2) *Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de deux demi-tours est-elle un demi-tour ?*
3) *Montrer que $SO(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $SO(3)$.*

Exercice 8. ✠ *On note ρ_1 et ρ_2 deux rotations affines de $\mathbb{R}^3$ et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, montrer que :*

1. *Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.*
2. *Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque rotation en produit de réflexions par rapport à des plans bien choisis).*
3. *Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segment $[O, \rho_2(O)]$).*

Exercice 9. *Soit R une rotation vectorielle d'angle θ et d'axe dirigé par u. Posons $\omega = \sin(\theta/2)u = (b,c,d)$ et $a = \cos(\theta/2)$. Montrer que pour tout vecteur x on a*

$$R(x) = x + 2a\omega \wedge x + 2\omega \wedge (\omega \wedge x)$$

Exercice 10. ✠♠ *On veut montrer que $SO(3)$ est simple, i.e. ses seuls sous-groupes distingués sont les sous-groupes triviaux $SO(3)$ et $\{Id\}$. Soit donc N un sous-groupe distingué de $SO(3)$. On suppose $N \neq \{Id\}$ et on veut montrer que $SO(3) = N$.*

1) Vérifier qu'il suffit de montrer que N contient un demi-tour.

2) Montrer qu'on peut supposer que N contient une rotation f d'angle $\theta \in]0, \pi[$. Soient a un vecteur unitaire dirigeant l'axe de f, x un vecteur unitaire orthogonal à a et $y = f(x)$. Soit $d = ||x - y||$. Montrer que $\forall m \in [0, d]$, il existe x_1 unitaire tel que $||f(x_1) - x_1|| = m$. On note $x_2 = f(x_1)$.

3) Fixons $m \in [0, d]$. Soient y_1, y_2 unitaires tels que $||y_1 - y_2|| = m$. Montrer qu'il existe une rotation r telle que $r(x_1) = y_1$, $r(x_2) = y_2$. En déduire qu'il existe $g \in N$ tel que $g(y_1) = y_2$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et ρ_n la rotation d'axe a et d'angle $\frac{\pi}{n}$ avec n assez grand pour que $||x - \rho_n(x)|| \leq d$. Soient $x_0 = x$, $x_1 = \rho_n(x)$, $\ldots$, $x_{i+1} = \rho_n(x_i)$, $\ldots$
- *Que vaut x_n ?*
- *Montrer qu'il existe une rotation $u_i \in N$ telle que $u_i(x_i) = x_{i+1}$.*
- *Soit $\nu = u_{n-1} \circ \ldots \circ u_1 \circ u_0$. Que vaut $\nu(x)$?*
- *Montrer que ν est un demi-tour et que ν est dans N.*
- *Conclure.*

Exercice 11. ✠ *Cet exercice est tiré du sujet de 1998. Supposons qu'il existe une partition du plan affine euclidien en cercles de rayons non nuls : $(C_i)_{i \in I}$. On notera D_i le disque de bord C_i*

1. *Montrer qu'il existe une suite $(i_n)_{\mathbb{N}}$ à valeurs dans I telle que*

$$D_{i_{n+1}} \subset D_n, \quad r_{i_{n+1}} \leq \frac{r_n}{2}$$

On pourra considérer le centre de D_i.

2. *En déduire que $\bigcap_{i_n} D_{i_n}$ est réduite à un point.*
3. *Conclure à une contradiction.*

Maintenant on se place dans l'espace affine euclidien de dimension trois.

1. *Montrer qu'une sphère privée de deux points admet une partition en cercles.*
2. *Soit D une droite et 0 un point dessus. Montrer que les cercles de rayon un centrés en $0_m \in D$ avec $OO_m = 4m + 1, m \in \mathbb{Z}$ vérifient :*
   - *Ils sont deux à deux disjoints.*
   - *Toute sphère de centre 0 coupe la famille de ces cercles en exactement deux points.*
3. *En combinant les deux questions trouver une partition de l'espace en cercles.*

2 Polyèdres et groupes d'isométries

Exercice 12.

1. *Rappeler la définition d'un simplexe de dimension $d \leq 3$.*
2. *Définir un polyèdre comme union de simplexes.*
3. *Trouver une décomposition du cube comme union de simplexes.*
4. *Qu'apporte l'hypothèse supplémentaire $P = \overline{P^\circ}$?*

Exercice 13. ✠ *Soit v un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, on définit*

$$H_v = \{y \in \mathbb{R}^3, < v, y >= 1\}$$

$$H_v^+ = \{y \in \mathbb{R}^3, < v, y >\leq 1\}$$

1. *Soit P un polyèdre d'isobarycentre l'origine, et $v_1 \dots v_k$ sont les sommets de P, montrer alors que $\bigcap_{i\leq k} H_{v_i}^+$ est un polyèdre. On montrera qu'il est compact par l'absurde. C'est le* **polyèdre dual** *de P, noté P^*.*
2. *Montrer qu'une face de P^* est de la forme H_v pour un v particulier..*
3. *Caractériser une arête du polyèdre dual.*
4. *Montrer que les sommets de P^* sont les centres des faces de P.*

Exercice 14. *Trouver le dual du tétraèdre, du cube, de l'icosaèdre.*

Exercice 15. *On considère dans le plan une partie X bornée connexe formée d'union de polygones telle que deux polygones s'intersectent suivant une arête ou un sommet et que pour tout polygone il existe un polygone de X (différent) qui l'intersecte suivant une arête. On note S, A, F le nombre de sommets, d'arêtes et de faces.*

1. *Montrer que si l'on triangularise X alors $S - A + F$ est constant.*
2. *Donner une définition du bord de X.*
3. *Montrer que $S - A + F$ est constant si on effectue une des deux opérations :*
   — *On enlève un triangle de X ayant un sommet sur le bord.*
   — *On enlève un triangle de X ayant une arête sur le bord.*
4. *En déduire que $S - A + F = 2$.*

Exercice 16. *Soit P un polyèdre convexe, on note S, A, F le nombre de sommets, d'arêtes et de faces.*

1. *On considère G l'isobarycentre de P et $R > 0$. On considère alors la projection centrale de centre G sur la sphère de rayon R de centre G. Montrer que pour R grand la projection de P est un ensemble homéomorphe au X de l'exercice précédent.*
2. *Montrer que $S - A + F = 2$. C'est la* **formule d'Euler**.
3. *Trouver un polyèdre ou la formule est fausse.*
4. *Reprendre la première question en projettent P sur un plan contenant une face de P et en agrandissant la face.*

2.1 Autour du tétraèdre

Exercice 17. □ *Montrer que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leur milieu.*

Exercice 18. *Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné $\mathcal{A}_4$. Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G.*

Exercice 19. *Par définition, un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les côtés sont isométriques (autrement dit, c'est l'enveloppe convexe de quatre points A_1, ..., A_4 tels qu'il existe $a > 0$ vérifiant : pour tout $i \neq j$, $||\overrightarrow{A_iA_j}|| = a$).*

Le jury a posé en 2008 la question suivante : est-ce qu'un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire est nécessairement régulier ?

1. *Dans un plan de $\mathbb{R}^3$, on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $CA(= CB) > AB$. On cherche l'ensemble des points $D \in \mathbb{R}^3$ vérifiant*
$$DA = DB = CA = CB \quad \text{et} \quad DC = AB.$$
Montrer que cet ensemble est à l'intersection de deux cercles.
2. *En déduire qu'il existe un tétraèdre non régulier avec des faces isométriques.*
Supposons maintenant que $ABCD$ soit un tétraèdre avec des faces de même aire.
3. *Soient I, J les pieds sur (AB) et (CD) de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD). Montrer que*
$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}||^2,$$
$$||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||^2 = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}||^2 + ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JD}||^2.$$
4. *En déduire une égalité de longueur.*
5. *Montrer que les faces du tétraèdre sont isométriques (on pourra considérer le retournement autour de la droite (IJ)).*

2.2 Groupes d'isométries

Exercice 20. *Trouver le groupe d'isométries préservant la courbe $y = \sin x$. On écrira la forme générale d'une isométrie du plan.*

Exercice 21. *Trouver le groupe d'isométries préservant l'astroide donnée par*
$$\begin{cases} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{cases} \qquad t \in [-\pi, \pi[.$$

Exercice 22. *Trouver les isométries préservant une hélice circulaire.*

Exercice 23. *Soit A une partie finie de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $Is(A) \subset SO(2)$ si et seulement si A n'admet pas d'axe de symétrie. Est ce vraie si A est infinie ?*

Exercice 24. *Trouver une partie du plan dont le groupe d'isométries est égal à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Indications :*
- *Soit r une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ centrée à l'origine et B un segment ne passant pas par l'origine. Considérer $\bigcup r^k(B)$.*
- *Montrer que cet ensemble n'est pas invariant par une autre rotation.*
- *Montrer qu'il n'est pas invariant par une symétrie axiale ne passant pas par l'origine.*
- *Ajuster B.*

Exercice 25. ♠✠ *Soit G un sous groupe fini de $SO(3)$. On suppose d'abord que G ne stabilise aucune droite.*

1. *A chaque élément de G diffèrent de l'identité on lui associe son axe et les deux points sur la sphère unité. Montrer que G agit sur cet ensemble X : Si P est un pole fixe par g, on regardera le pole fixé par hgh^{-1}.*
2. *On note s le nombres d'orbites et ν_i le cardinal du stabilisateur de chaque orbite. En calculant le cardinal de $\{(g,x) \in (G,X), g.x = x\}$ de deux façons montrer que le nombre d'orbites vaut*
$$s = \frac{1}{|G|}\sum_g |Fix(g)| \quad \textbf{Formule de Burnside}.$$
3. *En déduire une relation entre $s, |G|$ et le cardinal de X. Montrer alors :*
$$2(1 - \frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{s}(1 - \frac{1}{\nu_i}).$$
4. *Montrer que $s = 3$. On remarquera que $\nu_i \geq 2$ pour tout entier i et on raisonnera par l'absurde.*
5. *On suppose alors $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$. Montrer que $\nu_1 = 2$ et que $\nu_2 = 3$. On raisonnera par l'absurde en supposant $\nu_2 = 2$:*
   - *Montrer que dans ce cas, on a $|G| = 2n$ avec $\nu_3 = n$. Notons x un pole de l'orbite O_3.*
   - *Considérer G_x montrer que ce groupe est cyclique, notons a son générateur. Vérifier que a fixe deux pôles.*
   - *Trouver s dans $G \setminus G_x$ tel que $s(x) = -x$.*
   - *Décrire s^2 et en déduire que s, sa génèrent G. Conclure.*
6. *En déduire que les seules possibilités pour $|G|$ et les ν_i sont*
$$(12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5).$$
7. *Dans le cas ou G stabilise une droite, montrer que G est conjugué à un sous groupe de D_n.*

Exercice 26. ♠ *On considère un tétraèdre régulier,et $Is(T)$ son groupe d'isométries.*

1. *Montrer que si f est une isométrie préservant T, alors l'ensemble des points extrémaux est globalement invariant.*
2. *Construire un morphisme de groupe de $Is(T)$ dans $\mathfrak{S}_4$.*
3. *Montrer qu'il est injectif.*
4. *Construire une isométrie dont l'image par le morphisme soit une transposition.*
5. *En déduire $Is(T)$.*

Exercice 27. *Montrer que $\mathcal{A}_4$ est le seul sous groupe d'indice deux de $\mathfrak{S}_4$. En déduire $Is^+(T)$.*

Exercice 28. ♠ *On considère un cube C.*

1. *En étudiant les diagonales des faces, montrer qu'il existe deux tétraèdres réguliers inscrits dans ce cube ayant deux faces parallèles.*
2. *Soit s_0 la symétrie centrale par rapport au centre du cube. Montrer que s_0 commute avec tous les éléments de $Is(C)$.*

3. *En déduire l'existence d'une application de $Is(C)$ dans $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (On utilisera un exercice précédent).*
4. *Montrer que c'est un morphisme, puis un isomorphisme.*
5. *Trouver une isométrie positive du cube dont l'image par le morphisme soit de la forme $(\tau, 0)$ ou τ est une transposition.*
6. *En déduire que $Is^+(C)$ contient un sous groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et qu'il est d'indice deux dans $Is(C)$. Conclure.*

Exercice 29. ✠ *Soit P un polyèdre et $Is(P)$ son groupe d'isométries. Montrer que $Is(P)$ est produit direct de $Is^+(P)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe une symétrie centrale dans $Is(P)$. On définira une application de $Is(P)$ dans le produit en utilisant la symétrie centrale. Remarquez qu'en dimension deux le résultat est faux car la symétrie centrale est un déplacement.*

Exercice 30. ✠ *On considère un polyèdre dont les sommets sont donnés par*

$$(0, \pm\varphi, \pm 1)$$

ainsi que les permutés cycliques. Montrer que cela définit un polyèdre à 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces. Montrer qu'il est régulier et que chaque arête a pour longueur 2. **C'est l'icosaèdre régulier**.

Exercice 31. ✠♠ *On considère un icosaèdre régulier. On va montrer que $Is^+(I)$ est isomorphe à $\mathcal{A}_5$.*

1. *On considère une droite passant par les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que cela définit une rotation d'angle π dans $Is(I)$.*
2. *Montrer qu'elles commutent toutes et que chacune partitionne les sommets en trois sous ensembles de 4 sommets chacun lié à une droite particulière.*
3. *On considère une droite passant par les centres de deux faces opposées. Montrer qu'il existe deux rotations dans $Is(I)$ de cet axe et d'angles $\pm 2\pi/3$.*
4. *Montrer que ceci partitionne les sommets en quatre triangles équilatéraux.*
5. *On considère une droite passant par deux sommets opposés. Montrer qu'il existe deux rotations dans $Is(I)$ de cet axe et d'angles $k\pi/5$.*
6. *Comptez le nombre de rotations obtenues. Montrer qu'un élément de $Is^+(I)$ est forcément de cette forme. Conclure avec un exercice précédent.*

3 Coniques

3.1 Définitions

Exercice 32. *On considère trois plans A, B, C non alignés du plan et soit M de coordonnées barycentriques (x, y, z) par rapport au repère A, B, C. Montrer que M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si*

$$p^2yz + q^2zx + r^2xy = 0$$

ou p, q, r sont les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

1. On peut se restreindre au cas ou A, B, C sont sur le cercle unité.

2. Montrer alors que $p^2 = 2 - b\bar{c} - \bar{b}c$.

3. Calculer $|z|^2$ et conclure.

Soit $f \in \mathbb{R}_2[X, Y]$ un polynôme de degré 2. **Une conique** est l'ensemble des points M du plan affine tels que dans un repère on ait $f(M) = 0$.

Exercice 33. $\square$

1) Montrer que si f est un polynôme de degré 2, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_Ω et une constante c_Ω tels que

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + L_\Omega(\overrightarrow{\Omega M}) + c_\Omega. \tag{1}$$

Montrer que q ne dépend pas de Ω.

2) Calculer la différentielle de f en un point M_O de $\mathcal{E}$.

On pourra dorénavant prendre la formule (1) comme **définition d'une conique**. Une conique est **à centre** s'il existe un point Ω tel que M est sur la conique si et seulement si le symétrique de M par rapport à Ω est sur la conique.

Exercice 34. $\square$

1) Soit $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ une conique. Montrer que Ω est un centre de la conique associée si et seulement si $2B(\overrightarrow{O\Omega}, \cdot) + L_O = 0$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée à q.

2) Montrer que Ω est un centre si et seulement si $L_\Omega = 0$.

3) Comment trouver les centres d'une quadrique si f est donné en coordonnées par

$$f(M) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c_O.$$

Une conique est dite **propre** si la forme quadratique Q_0 est non dégénérée.

Exercice 35. *Montrer que cette définition est consistante : si $Q_O(u, z) = q(u) + L_O(u)z + c_O z^2$ est non dégénérée, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, $Q_\Omega(u, z) = q(u) + L_\Omega(u)z + c_\Omega z^2$ est non dégénérée. On pourra remarquer que $Q_\Omega(u, z) = Q_O(u + z\overrightarrow{O\Omega}, z)$.*

Exercice 36. *Montrer qu'un point (x, y) est sur une conique si et seulement si il existe une matrice B telle que l'on ait*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Trouver l'expression de B.

3.2 Coniques

Exercice 37. $\square$ *Les coniques suivantes, données dans un repère affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 2 sont-elles à centre ? Sont-elles propres ? Dessinez les.*

i) $f(x, y) = xy$,

ii) $f(x, y) = x^2$,

iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,
iv) $f(x,y) = x^2 - y$.

Exercice 38. *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien.*

1) *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'ellipse est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. En déduire qu'une ellipse est connexe, compacte.*
2) *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'hyperbole est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\pm a ch t, b sh t)$. En déduire qu'une hyperbole possède deux composantes connexes non bornées.*
3) *Donner une paramétrisation d'une parabole. En déduire qu'une parabole est connexe, non bornée.*

Exercice 39. □ *Dans le plan euclidien, décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par*

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 1, \\ xy + \lambda(x+y) + 1 = 0, \\ y^2 = \lambda \\ x^2 - 2x, \\ x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0 \end{cases}$$

Le cas échéant, on donnera les axes, sommets, paramètres.

Exercice 40. *Donner une expression explicite de la tangente à une conique propre, sous forme cartésienne, puis sous forme paramétrée. Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle coupe cette ellipse en un unique point (on pourra se ramener au cas du cercle). Cette propriété reste-t-elle vraie pour les hyperboles, paraboles ?*

Exercice 41. *Soit e, α des nombres réels avec $e > 0$. Identifier l'ensemble des points vérifiant en coordonnées polaires*

$$r = \frac{e}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Exercice 42. *Soit F un foyer de l'ellipse $\mathcal{C}$ et soit D la directrice correspondante. Si M est un point de $\mathcal{C}$, soit P le point d'intersection de la perpendiculaire à (MF) en F et de la droite D. Alors la droite (PM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M. (On rappelle que pour une ellipse, une droite est tangente si et seulement si elle a un unique point d'intersection avec l'ellipse). Même question lorsque $\mathcal{C}$ est une parabole.*

Exercice 43. *Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.*

1. *Si $e = 1$, montrer que c'est une parabole.*
2. *Si $e < 1$, montrer que c'est une ellipse.*
3. *Si $e > 1$, montrer que c'est une hyperbole.*

Exercice 44. *On considère une ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *et de foyers* F, F'*. Soient les deux nombres* $r=MF, r'=MF'$ *et*

$$f(M)=(r+r'+2a)(r+r'-2a)(r-r'+2a)(r-r'-2a)$$

1. *Montrer que* $r-r'-2a$ *ne peut être nul.*
2. *En déduire que* $f(M)=0$ *si et seulement si* $r+r'=2a$*.*
3. *Calculer* $f(M)$*.*
4. *En déduire qu'un point est sur l'ellipse si et seulement si* $MF+MF'=2a$*.*
5. *En déduire que la tangente à* M *à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle* FMF'*.*

Exercice 45. *On considère un cylindre coupé par un plan. Soient* S, S' *deux sphères intérieures au cylindre et tangentes à celui ci. On suppose qu'elles sont de part et d'autre du plan et et tangentes à celui ci en deux points. Montrer que ces points sont les foyers de l'ellipse.*

Exercice 46. *Soient* F, F' *deux points, on considère l'ensemble des poins* M *tels qu'il existe un réel positif* a *vérifiant : le cercle de centre* M *passant par* F *est tangent au cercle de centre* F' *de rayon* $2a$*. Faire le lien avec la définition usuelle de conique.*

Exercice 47. ✠♠*[Théorème de Pascal] On considère un hexagone de sommets* A, B, C, D, E, F *et on définit les points* P, Q, R *comme intersection des droites* $(AE)-(DB)$ *;* $(AF)-(DC)$ *;* $((BF)-(EC)$*. Montrer que* P, Q, R *sont alignés si et seulement si l'hexagone est sur une ellipse : On considère un repère barycentrique défini par* A, B, C *:*

- *Calculer les équations des droites* (AE) *et* (DB)*.*
- *Trouver les coordonnées de* P, Q, R*.*
- *Donner une condition en termes de déterminant pour que* P, Q, R *soient alignés.*
- *Ecrire en terme de déterminant le fait que les points sont sur l'ellipse.*
- *Voir que les deux déterminants sont égaux.*

Exercice 48. *Soit* E *une ellipse de foyer* F_1, F_2 *et* M *extérieur à l'ellipse. On considère les deux tangentes à l'ellipse issue de* M*. Montrer que*

$$(MT_1, MF_1)=(MF_2, MT_2).$$

1. *On considère* $\sigma_{MF_1}\circ\sigma_{MT_1}$ *produit des symétries orthogonales par rapport aux deux droites.*
2. *Calculer l'image l'image du symétrique de* F_1 *par rapport à* (MT_1)*.*
3. *Montrer que ce point est aligné avec* T_1, F_2*.*
4. *Conclure grâce à une propriété de la tangente de l'ellipse.*

Exercice 49. ✠♠*[Théorème de Marden] On considère un triangle* ABC *du plan. Soient* z_1, z_2, z_3 *les affixes des sommets, on pose* $P(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$*.*

1. *Montrer que les points* F, G *d'affixes les racines de* P' *sont intérieurs au triangle.*
2. *Montrer qu'on a égalité entre les angles* (AF, AB) *et* (AG, AC)*.*
3. *Considérer l'ellipse de foyers* F, G *tangente à* (AB)*. Montrer qu'elle est tangente aux autres côtés du triangle. Conclure.*

4. Montrer que tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine. Quelle est l'image de cette ellipse ?

Exercice 50. *Soit σ une permutation de σ_3 et a, b, c trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que les barycentres de $(1, \sigma(a)), (j, \sigma(b)), (j^2, \sigma(c))$ sont sur un cercle.*

Exercice 51. *Soit P un polynôme réel de degré trois. On considère*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = P(y)\}$$

1. *Montrer que cet ensemble est l'union d'une droite et d'une conique.*
2. *Trouver une CNS sur P pour que la conique soit une ellipse.*
3. *Dans ce cas trouver l'excentricité.*

Exercice 52. ✠ *Écrire l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques et montrer qu'elle est toujours de la forme*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

Trouver l'équation de l'ellipse de Steiner, et de l'ellipse circonscrite au triangle.

Exercice 53. ✠ *Soit C un cône de $\mathbb{R}^3$ et P un plan, soit P' le plan parallèle à P passant par le sommet du cône. Montrer que*
- *$P \cap C$ est une ellipse si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à un point.*
- *$P \cap C$ est une parabole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à une droite.*
- *$P \cap C$ est une hyperbole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à deux droites.*

3.3 Utilisation du résultant

Exercice 54. *Calculer le résultant $Res_Y(P, Q)$ des polynômes $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ et $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ par rapport à la variable Y (autrement dit, on considère P et Q comme des polynômes à coefficients dans $A = \mathbb{R}[X]$). En déduire comment trouver les points d'intersection des ellipses d'équation $P = 0$ et $Q = 0$.*

Exercice 55. *Donner l'équation implicite de la courbe paramétrée : $x(t) = t^2 + 1,\ y(t) = t^2 + t$. On pourra considérer les polynômes $X - T^2 - 1$ et $Y - T^2 - T$ et éliminer T.*

4 Espace projectif et inversions

4.1 sphère de Riemann

On note un élément de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ par $[z, t]$. On rappelle que cet espace est le quotient de $\mathbb{C}^2$ par la relation $(z, t) \sim (z', t') \iff z = \lambda z'; t = \lambda t'$, avec λ complexe.

Exercice 56. *Montrer que l'application suivante entre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est injective*

$$g(x, y, z) = [x + iy, 1 - z], z \neq 1$$

$$g(x, y, z) = [1 + z, x - iy], z \neq -1$$

Exercice 57. *Montrer que l'application* h *vue comme application de* $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}(\sim \mathbb{R}^2)\times\mathbb{R}$ *donnée par*

$$h(z,t) = (\frac{2z\bar{t}}{|z|^2+|t|^2}, \frac{|z|^2-|t|^2}{|z|^2+|t|^2})$$

est à valeurs dans S^2 *et que c'est la réciproque de l'application précédente.*

On a donc trouvé une bijection entre $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ et S^2.

Exercice 58. *On considère* $\mathbb{R}^3$*, le plan d'équation* $z = 0$ *et la sphère* S^2 *de rayon un centrée à l'origine. Soit* N *le point* $(0,0,1)$ *et on identifie le plan* $z = 0$ *avec* $\mathbb{C}$*. On définit alors la* **projection stéréographique** *par*

$$\phi : \begin{array}{ccc} S^2 \setminus N & \to & \mathbb{C} \\ M = (x,y,z) & \mapsto & M' \end{array}$$

M' *est l'intersection de* (MN) *avec le plan. Montrer alors*

1. *L'affixe de* M' *est égal à* $\frac{x+iy}{1-z}$*.*
2. *La fonction est une bijection que l'on peut étendre à* S^2 *en posant* $\infty = \phi(N)$*.*

On définit alors $\hat{\mathbb{C}}$ comme $\mathbb{C} \cup \infty$. C'est le **compactifié d'Alexandrov** ou aussi **la sphère de Riemann**.

Exercice 59. *Montrer que l'on peut mettre une topologie sur cet ensemble en posant* U *est un ouvert si et seulement si* $\phi^{-1}(U)$ *ouvert de* S^2*.*

Exercice 60. ✠ *Montrer en composant les applications précédentes que l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1\mathbb{C} & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ (z_1,z_2) & \mapsto & z_1/z_2, \quad z_2 \neq 0 \\ (1,0) & \mapsto & \infty \end{array}$$

est un homéomorphisme entre les deux espaces.

4.2 Inversion et homographies

On appelle **cercle-droite** un ensemble du plan donné par l'équation

$$a|z|^2 - \omega\bar{z} - z\overline{\omega} = k$$

ou $a, k \in \mathbb{R}$. Remarquer que si $a = 0$ c'est une droite, sinon c'est un cercle.

On appelle **inversion** de centre Ω de puissance k^2 un application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{\Omega\}$ qui envoie M sur M' défini par

— Ω, M, M' alignés.
— $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = k^2$

Exercice 61. *Montrer :*

1. *l'inversion préserve chaque point du cercle de centre* Ω *de rayon* k*.*
2. *C'est une bijection du plan privé de* Ω*.*

Exercice 62.

1. *Montrer que pour une inversion i et $z \in \mathbb{C}$ on a $i(z) = \omega + \frac{k^2}{z-\omega}$.*
2. *On peut la prolonger à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $i(\omega) = \infty, i(\infty) = \omega$.*

Exercice 63. ✠ *Montrer les propositions suivantes :*
— *L'image d'une droite passant par Ω est elle même.*
— *L'image d'une droite ne passant pas par Ω est un cercle passant par Ω.*
— *L'image d'un cercle passant par Ω est une droite ne passant pas par le centre.*
— *L'image d'un cercle ne passant pas par Ω est un cercle ne passant pas le centre.*
Pour les deux dernières question on montrera qu'une inversion est une involution.

Ainsi l'image d'un cercle-droite par une inversion est un cercle droite.

Exercice 64. *Soit i une inversion et M, N deux points du plan prouver que $M, N, i(M), i(N)$ sont alignés ou cocycliques. On pourra utiliser les propriétés de la puissance d'un point par rapport à un cercle.*

Exercice 65. ♠ *Étudier l'application $i(z) = 2i + \frac{1}{z-2i}$. Faire de même avec $h(z) = \frac{z-1-i}{2z+3i}$.*

On appelle **homographie** une application définie sur $\hat{\mathbb{C}}$ de la forme :

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, h(\infty) = \frac{a}{c}, h(-d/c) = \infty$$

Exercice 66. *Monter que le cas $ad - bc = 0$ n'est pas très intéressant. En déduire que l'on peut se restreindre à $ad - bc = 1$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe de $SL_2(\mathbb{C})$ sur le groupe des homographies.*

Exercice 67. *Soit a, b, c trois points de $\hat{\mathbb{C}}$. Alors il existe une unique homographie f telle que*

$$f(a) = 0, f(b) = 1, f(c) = \infty$$

On dit qu'on a une **action 3-transitive du groupe des homographies sur la sphère de Riemann**.

Exercice 68. ✠ *Démontrer qu'une homographie conserve le birapport. On utilisera l'exercice précédent pour écrire le birapport de a, b, c, d.*
En déduire qu'une homographie envoie un cercle-droite sur un cercle droite.

Exercice 69. *Montrer qu'une homographie préserve les angles orientés.*

Exercice 70. *Montrer qu'une homographie différente de l'identité possède un ou deux points fixes.*
— *S'il n'y a qu'un point fixe égal à ∞ alors $f(z) = z + b$.*
— *Si f n'a qu'un point fixe alors f est conjuguée à une translation.*
— *Si f a deux points fixes alors elle est conjuguée à $z \mapsto az$.*

Exercice 71. *Soit H une application $\mathbb{C}$ linéaire, bijective sur $\mathbb{C}^2$.*

1. *Montrer que cette application définit une application de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ dans lui même.*
2. *Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de ces applications. Montrer que cet ensemble possède une structure de groupe. Montrer qu'il est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{C})$.*

3. *Montrer que ce groupe est engendré par les similitudes directes et par* $z \mapsto \frac{1}{z}$.
4. *Faire le lien avec l'exercice précédent en réduisant* H.

Exercice 72. *Soit* $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ *un birapport. On considère l'action de* $\mathfrak{S}_4$ *sur cet ensemble.*

1. *Montrer que cela définit six nombres complexes (et pas 24).*
2. *Exprimer ces nombres en fonction de* λ.
3. *Montrer que cet ensemble vu comme ensemble d'homographies est un groupe isomorphe à* $\mathfrak{S}_3$.
4. *Trouver les permutations qui préservent le birapport.*
5. *En déduire que le noyau de l'action est isomorphe au groupe de Klein.*

Exercice 73. *On considère* $\mathbb{H}$ *l'ensemble des nombres complexes de partie imaginaire positive.*

1. *Montrer que* $SL_2(\mathbb{R})$ *agit sur cet ensemble.*
2. *Trouver le stabilisateur de* i.
3. *En déduire que* $\mathbb{H} \sim SL_2(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$.

5 Références

Quelques livres classiques :

— M. Audin : "Géométrie" et "125 exercices de géométrie" (Page web).
— M. Berger : "Géométrie"+ "Géométrie vivante".
— P. Caldero et J. Germoni : " Histoires hédonistes de groupes et géométries".
— R. Deltheil-D. Caire : "Géométrie : transformations, coniques".
— S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas "Exercices de mathématiques".
— J. Fresnel : "Méthodes modernes en géométrie".
— R. Goblot : "Thèmes de géométrie".
— Y. Ladegaillerie : "Géométrie affine et projective".
— R. Vidonne : "Groupe circulaire, rotation et quaternion."