Exercices de géométrie
Agrégation Interne 2014-2015

N. Bédaride

Les exercices marqués d'un $\square$ sont simples, ceux marqués d'un ✠ sont plus complexes et ceux marqués d'un ♠ peuvent faire l'objet d'un développement.

1 Espaces affines, barycentres, groupe affine

Exercice 1. $\square$

1. *Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à second membre nul est un espace vectoriel. Si les seconds membres ne sont pas nuls et qu'il existe une solution, c'est un espace affine.*
2. *Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel. Si le second membre est non nul, c'est un espace affine (ce qu'on formule souvent en disant que toute solution de l'équation est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière).*
3. *Montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = \pi\}$ est un espace affine, trouver sa direction.*

Exercice 2. *Soient d, d', d'' 3 droites parallèles distinctes, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ 2 droites dont aucune n'est parallèle à d. Soient $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. Montrer alors*

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

On pourra commencer par le cas de deux droites parallèles.

Réciproquement, si un point B de $\mathcal{D}_1$ vérifie l'égalité

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}},$$

montrer alors $B = A''_1$.

(Remarque : Si A, B, C sont 3 points alignés, et u un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent, on peut écrire $\overrightarrow{AB} = \lambda u$ et c'est ce nombre λ qu'on note $\overline{AB}$. Cette mesure algébrique dépend du choix de u. En revanche, le rapport $\overline{AB}/\overline{AC}$ n'en dépend pas.)

Exercice 3 (Desargues)**.** ✠ *Soient $ABC, A'B'C'$ deux triangles du plan affine sans sommet commun*

1. *Si les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes et que $(AB) \parallel (A'B'), (AC) \parallel (A'C')$ montrer alors que $(BC) \parallel (C'B')$.*

2. *Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont parallèles ou concourantes si $(AB) \parallel (A'B'), (AC) \parallel (A'C'), (BC) \parallel (C'B')$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant eux de ces droites concourantes et utiliser la première question.*

Exercice 4 (Desargues, version plus simple)**.** ♠ *On considère trois droites concourantes non coplanaires. Sur chaque droite on considère deux points différents du point commun : a, a', b, b', c, c'. On suppose que les droites (bc) et $(b'c')$ se coupent ainsi que celles obtenues par permutation. Montrer que les trois points d'intersection sont alignés. On notera α, β, γ les trois points et on montrera que la droite $(\alpha\beta)$ est à l'intersection de deux plans bien choisis.*

En déduire le théorème dans le cas de l'exercice précédent en introduisant un point hors du plan.

Exercice 5. □ *Montrer que les points de l'espace affine de dimension n , $(x_i)_{i=1\dots n+1}$ de coordonnées barycentriques $(x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n+1))$ pour tout $i = 1 \dots n+1$ constituent une base affine si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \dots & x_1(n+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_i(n+1)2 & x_i(2) & \dots & x_i(n+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ x_{n+1}(n+1)2 & x_{n+1}(2) & \dots & x_{n+1}(n+1)) & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exercice 6. ♠ *Soit ABC un triangle non plat. Montrer que les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A, B, C) intérieur au triangle sont proportionnelles aux aires orientées des triangles MBC, MCA, MAB. On trouvera ces coordonnées via le produit vectoriel et un système linéaire.*

Exercice 7. *Montrer qu'une application est affine si et seulement si elle préserve les barycentres. Montrer que l'image d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Exercice 8. □ *Montrer que l'ensemble des homothéties et translations est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.*

Exercice 9. *Montrer que le groupe affine est un produit semi-direct du groupe linéaire par le groupe des translations. Montrer que ce groupe s'injecte dans $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ ou n est la dimension de l'espace affine.*

2 Angles

Exercice 10. *On considère un triangle ABC. On note a, b, c, R les mesures des côtés BC, AC, AB et du rayon du cercle circonscrit. On note α, β, γ les mesures des angles non orientés en A, B, C respectivement.*

1) Montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

2) Montrer que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Exercice 11. ✠ *Soient D, D' et D'' trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. Soient u, u' et u'' des vecteurs directeurs unitaires choisis de telle sorte que l'on pose*

$$\langle u', u''\rangle = \cos a \ , \ \langle u'', u\rangle = \cos b.$$

Soit H l'hyperplan vectoriel $D''^{\perp}$ et x, x' les projections orthogonales de u et u' sur H. On pose enfin $v = \dfrac{x}{||x||}$ et $v' = \dfrac{x'}{||x'||}$ et α désigne l'angle géométrique des vecteurs v et v'. Montrer que

$$\langle u, u'\rangle = \cos a \cos b + \langle v, v'\rangle \sin a \sin b = \cos a \cos b + \cos \alpha \sin a \sin b.$$

En déduire que l'angle géométrique définit une distance sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$d(D, D') = \arccos < u, u' >.$$

Exercice 12. ♠ *Soit C un cercle de centre O et M, A, B trois points dessus. Montrer le* **théorème de l'angle au centre** *:*

$$(OA, OB) = 2(MA, MB) \mod 2\pi$$

Soit τ la tangente en A au cercle et T un point dessus. Montrer que

$$(AT, AB) = (MA, MB) \mod \pi$$

Exercice 13. *Soient A, B deux points distincts du plan et α un réel. On considère l'ensemble*

$$\{M, (MA, MB) = \alpha \mod \pi\}$$

Montrer que c'est un cercle passant par A, B dont la tangente en A vérifie pour tout point T dessus $(AT, AB) = \alpha \mod \pi$.

C'est le **cercle capable d'angle** α.

Exercice 14. *Montrer que l'ensemble suivant est un arc de cercle du cercle précédent.*

$$\{M, (MA, MB) = \alpha \mod 2\pi\}$$

Exercice 15. ♠ *Montrer que quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si*

$$(CA, CB) = (DA, DB) \mod \pi$$

3 Géométrie et calculs

Exercice 16. □ *Le point d'affixe z est sur la droite (AB) ou a, b sont les affixes des points si et seulement si*

$$det \begin{pmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 17. Lignes de niveaux. *Soient a, b deux complexes différents et λ un nombre réel. Montrer que :*

- *L'ensemble des solutions de* $|z-a| = \lambda|z-b|$ *est soit vide soit un point soit une droite soit un cercle.*
- *L'ensemble des solutions de* $|z-a| + |z-b| = \lambda$ *est vide, ou deux points ou un segment ou une ellipse.*
- *L'ensemble des solutions de* $Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \theta \mod \pi$ *est soit la droite* AB *soit un cercle privé de deux points.*
- $Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \theta \mod 2\pi$ *est soit la droite privée du segment* $\theta = 0$ *soit le segment privé des bords, soit un arc de cercle privé de* A, B.

Exercice 18. *Montrer que quatre points distincts du plan* A, B, C, D *sont alignés ou cocycliques si et seulement si*

$$\frac{a-d}{b-d}\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$$

Exercice 19. *Soient* A, B, C *trois points non alignés et* a, b, c *les longueurs des côtés du triangle formé par ces points. Soit* S *l'aire du triangle, montrer alors :*

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$S = rp = (p-a)r_a = \frac{abc}{4R}$$

ou p *est le demi périmètre du triangle et* a, b, c *les longueurs des côtés.*

Exercice 20. ✠♠ *Soient* A, B, C *trois points non alignés et* a, b, c *les longueurs des côtés du triangle formé par ces points. Montrer*

1. *Le centre du cercle inscrit est barycentre de*

$$(A, a); (B, b); (C, c)$$

2. *Le centre du cercle circonscrit est barycentre de*

$$(A, \sin(2A)); (B, \sin(2B)); (C, \sin(2C))$$

3. *L'orthocentre est barycentre de*

$$(A, \tan(A)); (B, \tan(B)); (C, \tan(C))$$

4 Polyèdres et groupes d'isométries

Exercice 21. ♠ *On considère un tétraèdre régulier,et* $Is(T)$ *son groupe d'isométries.*

1. *Montrer que si* f *est une isométrie préservant* T*, alors l'ensemble des points extrémaux est globalement invariant. On raisonnera par l'absurde.*
2. *Construire un morphisme de groupe de* $Is(T)$ *dans* $\mathfrak{S}_4$.
3. *Montrer qu'il est injectif.*
4. *Construire une isométrie dont l'image par le morphisme soit une transposition.*
5. *En déduire* $Is(T)$.

Exercice 22. *Montrer que $\mathcal{A}_4$ est le seul sous groupe d'indice deux de $\mathfrak{S}_4$. En déduire $Is^+(T)$.*

Exercice 23. *Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné $\mathcal{A}_4$. Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G.*

Exercice 24. ♠ *On considère un cube C.*

1. *En étudiant les diagonales des faces, montrer qu'il existe deux tétraèdres réguliers inscrits dans ce cube.*
2. *Soit s_0 la symétrie centrale par rapport au centre du cube. Montrer que s_0 commute avec tous les éléments de $Is(C)$.*
3. *En déduire l'existence d'une application de $Is(C)$ dans $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
4. *Montrer que c'est un morphisme, puis un isomorphisme.*
5. *Trouver une isométrie positive du cube dont l'image par le morphisme soit une transposition.*
6. *En déduire que $Is^+(C)$ contient un sous groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et qu'il est d'indice deux dans $Is(C)$. Conclure.*

5 Isométries dans l'espace

Exercice 25. ♠ *Si f est une isométrie d'un espace affine de dimension n, montrer qu'il existe un unique couple (g, u) ou u est un vecteur de l'espace vectoriel et g une isométrie ayant au moins un point fixe tels que $f = t_u \circ g = g \circ t_u$. On commencera par chercher u et on utilisera une propriété des endomorphismes orthogonaux.*

Exercice 26. □ *Dans $\mathbb{R}^3$ orienté, on note s_P la réflexion vectorielle de plan P.*

1) Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour (par rapport à quelle droite ?)

2) Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de deux demi-tours est-elle un demi-tour ?

3) Montrer que $SO(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $SO(3)$.

Exercice 27. ✠ *Étudier la composition de deux rotations affines dans l'espace affine euclidien de dimension 3. On pourra montrer que si ρ_1 et ρ_2 désignent ces deux rotations et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, alors*

1) Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.

2) Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque rotation en produit de réflexions par rapport à des plans bien choisis).

3) Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segement $[O, \rho_2(O)]$).

6 Convexité

Exercice 28. *Trouver un ensemble fermé dont l'enveloppe convexe n'est pas fermée.*
Trouver un ensemble non convexe tel que pour tous $x, y \in C$ $\frac{x+y}{2}$ soit dans C.

Exercice 29. *Soient C, C' deux convexes de $\mathbb{R}^n$.*

1. *Montrer que l'ensemble $\{\frac{M+N}{2}, M \in C, N \in C'\}$ est un convexe.*
2. *Si C, C' sont deux segments de $\mathbb{R}^3$, déterminer l'ensemble précédent.*

Exercice 30. *Montrer qu'un ensemble est convexe si et seulement si tout point est barycentre à coefficients positifs de points de cet ensemble.*

Exercice 31. ♠ *Si X est une partie d'un espace affine de dimension n, montrer que tout point de son enveloppe convexe est barycentre à coefficients positifs d'une famille de $n+1$ points de X. (On supposera que le point est barycentre de p points avec $p > n+1$ et on se ramènera à $p-1$ points.) En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est compacte.*

7 Coniques

Soit $f \in \mathbb{R}_2[X,Y]$ un polynôme de degré 2. **Une conique** est l'ensemble des points M du plan affine tels que dans un repère on ait $f(M) = 0$.

Exercice 32. □

1) Montrer que si f est un polynôme de degré 2, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_Ω et une constante c_Ω tels que

$$f(M) = q(\overrightarrow{\Omega M}) + L_\Omega(\overrightarrow{\Omega M}) + c_\Omega. \tag{1}$$

Montrer que q ne dépend pas de Ω.

2) Calculer la différentielle de f en un point M_O de $\mathcal{E}$.

On pourra dorénavant prendre la formule (1) comme définition d'une conique. Une conique est **à centre** s'il existe un point Ω tel que M est sur la conique si et seulement si le symétrique de M par rapport à Ω est sur la conique.

Exercice 33. □

1) Soit $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ une conique. Montrer que Ω est un centre de la quadrique associée si et seulement si $2B(\overrightarrow{O\Omega}, \cdot) + L_O = 0$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée à q.

2) Montrer que Ω est un centre si et seulement si $L_\Omega = 0$.

3) Comment trouver les centres d'une quadrique si f est donné en coordonnées par : $f(M) = \sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c_O$?

Une conique est dite **propre** si la forme quadratique Q_0 est non dégénérée.

Exercice 34. *Montrer que cette définition est consistante : si $Q_O(u,z) = q(u) + L_O(u)z + c_Oz^2$ est non dégénérée, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, $Q_\Omega(u,z) = q(u) + L_\Omega(u)z + c_\Omega z^2$ est non dégénérée. On pourra remarquer que $Q_\Omega(u,z) = Q_O(u + z\overrightarrow{O\Omega}, z)$.*

Exercice 35. *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien.*

1) Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'ellipse est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. En déduire qu'une ellipse est connexe, compacte.

2) Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'hyperbole est une courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\pm a ch t, b sh t)$. En déduire qu'une hyperbole possède deux composantes connexes non bornées.

3) Donner une paramétrisation d'une parabole. En déduire qu'une parabole est connexe, non bornée.

Exercice 36. *Soit e, α des nombres réels avec $e > 0$. Identifier l'ensemble des points vérifiant en coordonnées polaires*

$$r = \frac{e}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Exercice 37. *Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.*

1. *Si $e = 1$, montrer que c'est une parabole.*
2. *Si $e < 1$, montrer que c'est une ellipse.*
3. *Si $e > 1$, montrer que c'est une hyperbole.*

Exercice 38. ✠♠*[Ellipse de Steiner] On considère un triangle du plan. Soient z_1, z_2, z_3 les affixes des sommets, on pose $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.*

1. *Montrer que les points d'affixes les racines de P' sont intérieurs au triangle.*
2. *Considérez le cas ou le triangle a pour isobarycentre l'origine et montrer alors que les milieux des côtés sont sur une ellipse de foyers les racines de P'. On posera un calcul en complexes en utilisant une propriété de l'ellipse.*
3. *Montrer que tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine. Quelle est l'image de cette ellipse ?*

Exercice 39. ✠ *Ecrire l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques et montrer qu'elle est toujours de la forme*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

Trouver l'équation de l'ellipse de Steiner, et de l'ellipse circonscrite au triangle.

Exercice 40. ✠ *Soit C un cône de $\mathbb{R}^3$ et P un plan, soit P' le plan parallèle à P passant par le sommet du cône. Montrer que*

- *$P \cap C$ est une ellipse si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à un point.*
- *$P \cap C$ est une parabole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à une droite.*
- *$P \cap C$ est une hyperbole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à deux droites.*

8 Références

- M. Audin : "Géométrie" et "125 exercices de géométrie" (Page web).
- M. Berger : "Géométrie"et "Géométrie vivante".
- P. Caldero et J. Germoni : " Histoires hédonistes de groupes et géométries".
- R. Deltheil-D. Caire : "Géométrie : transformations, coniques".
- S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas "Exercices de mathématiques".
- J. Fresnel : "Méthodes modernes en géométrie".
- R. Goblot : "Thèmes de géométrie".
- Y. Ladegaillerie : "Géométrie affine et projective".