Exercices agrégation interne/externe

N. Bédaride*

Résumé

Exercices en algèbre linéaire, géométrie et groupes. Les indications sont en rouge.

Table des matières

1 Développements

Liste non exhaustive, non ordonnée, à seul titre indicatif.

— Théorème de Dunford.

*Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France. Email : `nicolas.bedaride@univ-amu.fr`

— Les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{R})$.
— Théorème de Burnside : un groupe est fini dans $GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si il est d'exposant fini.
— Dual de $M_n(\mathbb{R})$. Tout hyperplan rencontre $GL_n(\mathbb{R})$.
— Dimension du commutant d'une matrice.
— Isomorphisme entre $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{R})$.

— Endomorphismes normaux.
— Inégalité de Hadamard et déterminant de Gram.
— Réduction des matrices symétriques réelles.
— Décomposition polaire.
— Décomposition d'une isométrie vectorielle en produit de symétries orthogonales.

— Isométries du tétraèdre régulier, et du cube.
— Décomposition canonique d'une isométrie affine.
— Par cinq points génériques, passe une conique : théorème de Pascal.
— Théorèmes de Menelaus, Céva, Pappus.

— Le groupe $\mathcal{A}_5$ est simple.
— Nombre de colliers de perles.
— Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.
— Résultant de deux polynômes, application au polynôme minimal de nombres algébriques.

2 Algèbre linéaire

Exercice 1. *Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R}), B \in M_{2,2}(\mathbb{R}), C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x. On pourra étudier le rang des matrices.*

Exercice 2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t AA$. Montrer que $rg(A) = rg(B)$. Trouver un contre exemple dans $M_2(\mathbb{C})$. On étudiera les noyaux des matrices.*

Exercice 3. *Soit $x_0, \dots, x_n$ des points différents de $[0,1]$. Monter qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ réels tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait*

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i).$$

Cherchez une base de l'espace dual.

Exercice 4. *Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :*

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & \phi_i(P) = P(x_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & \psi_i(P) = P'(x_i) \end{array}$$

1. *Montrer que $(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de E^*.*
2. *Chercher la base de E duale de celle ci. On notera $P_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.*

Exercice 5. *Soient u, v deux endomorphismes de E. Montrer que*

$$rg(u) - rg(v \circ u) = dim(Imu \cap Kerv).$$

Pensez au théorème du rang.

Exercice 6. *Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :*

$$p + q \text{ est un projecteur } \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p+q$. Montrer que $rg(p) = tr(p)$ en dimension finie. on regardera les valeurs propres de p.

Exercice 7. *Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier n avec $A^n = Id$. Montrer que $A^{12} = Id$. On pourra chercher les valeurs propres de A.*

Exercice 8. *Trouver les matrices telles que $A^2 - 4A + 3Id = 0$. On cherchera les valeurs propres de A.*

Exercice 9. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 3v_n \end{cases}$$

Donner une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0. On introduira une matrice dont on cherchera les puissances. Pour trouver les puissances, on pensera aux valeurs propres.

Exercice 10. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + Id$. Montrer que $det(A)$ est strictement positif. On peut tracer le graphe d'une fonction polynômiale de degré trois.*

Exercice 11. *Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous $z_1,\ldots, z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :*

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) *Calculer* $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ *et* $\det(M_3)$.

ii) *Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :*

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.
Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

Exercice 12. ✠*Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite stable ou un plan stable. Un polynôme à coefficients réels n'admet pas forçément de racine réelle, mais a toujours des racines complexes.*

Exercice 13. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie telle qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f^k soit inversible et diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable. On cherchera le nombre de racines complexes de l'équation $X^k = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.*

Exercice 14. □ *Soit E un espace vectoriel et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*

1) Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

2) On suppose que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. A-t-on $G = (F_1 \cap G) \oplus (F_2 \cap G)$?

3) Généraliser le résultat de la première question à un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels.

Exercice 15. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$, on définit une forme linéaire e_i^* sur E par $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $e_i^*(e_i) = 1$. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les $(e_i^*)_{i\in I}$ forment une base du dual E^* et en déduire que E et E^* ont même dimension.*

Exercice 16. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est non inversible si et seulement si il existe P inversible telle que PA soit nilpotente.*

Exercice 17. *Soient $f_1, \dots f_n$ des formes linéaires sur E, de dimension n telles qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $f_i(x) = i = 1 \dots n$. Montrer que les formes sont liées.*

Exercice 18. *Montrer que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang r si et seulement si il existe P, Q matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$PAQ = J_r$$

En déduire que $rg(A) = rg({}^tA)$.

Exercice 19. *Calculer A^n pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 20. *Trouver les matrices telles que $A^2 - 4A + 3Id = 0$.*

Exercice 21. *Trouver le commutant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^k, k \in \mathbb{N}$. Pour cela on décomposera en éléments simples $\frac{X^k}{M_A(X)}$.

Exercice 23. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + Id$. Montrer que $det(A)$ est strictement positif.*

Exercice 24. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients ± 1. Montrer que le déterminant est divisible par 2^{n-1} en utilisant des opérations élémentaires.*

Exercice 25. *Résoudre dans $\mathbb{R}_+^3$ le système* $\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases}$

Exercice 26. *Trouver la décomposition LU de la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 27. *Quel est l'espace vectoriel engendré par $GL_n(\mathbb{R})$?*

Quelles sont les endomorphismes ayant même matrice dans toute base ?

Exercice 28. *Rang de la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 29. *Les matrices suivantes sont elles semblables ?*

— $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

— *Deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de même polynôme caractéristique sont elles semblables ?*

— *Complétez pour que les deux matrices soient semblables* $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & ? \\ 2 & 1 & ? \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver la matrice de passage.

Exercice 30. *Trouver le cardinal de $GL_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

2.1 Espaces vectoriels

Exercice 31. *On note C l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et C_0 le sous-espace des suites qui convergent vers 0.*

a) On note Φ l'application de C dans $\mathbb{R}$ qui à chaque suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$ associe $\Phi(x) = \lim_n x_n$. Montrer que Φ est une forme linéaire sur C. Quel est son noyau ?

b) Etant donnée une suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$ on lui associe la suite $y = (y_k)_{k\geq 1}$ définie par $y_1 = \Phi(x)$ et pour $k = 1, 2, \ldots$ $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$. Montrer que $y \in C_0$. Montrer que l'application $u : C \to C_0$ ainsi définie est un isomorphisme.

c) On désigne par C_{st} le sous-espace de C des suites constantes. Montrer que $C = C_0 \oplus C_{st}$.

Exercice 32.

— *Définir la dimension d'un espace vectoriel.*
— *Énoncer le théorème de la base incomplète.*
— *Montrer que tout sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie est de dimension finie.*
— *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.*

Exercice 33. *Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, calculer le rang de $M \to AM - MA$.*

Exercice 34. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme $M \to tr(A)M + tr(M)A$ est-il diagonalisable ?*

Exercice 35. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

1) *Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.*
2) *Déterminer le centre de $GL(E)$.*

Exercice 36.

1. *Montrer que si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables alors elles ont même déterminant, trace, rang, polynôme caractéristique et valeurs propres.*
2. *Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique forment un invariant global pour cette relation dans $M_2(\mathbb{R})$ et dans $M_3(\mathbb{R})$.*
3. *Trouver un contre exemple en dimension plus grande avec des matrices nilpotentes.*

Exercice 37.

1) *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.*
2) *En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 38. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $m \neq 0$ et f un endomorphisme de E.*

1) *Montrer que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ (respectivement la suite $(\mathrm{Ker}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$) décroît strictement puis devient stationnaire(respectivement croît strictement puis devient stationnaire).*
2) *On suppose que f est nilpotent et on note n son indice de nilpotence (c'est-à-dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$).*
   1. *Montrer que $n \leq m$ en remarquant que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ décroît strictement jusqu'à $p = n$ puis devient stationnaire.*
   2. *Retrouver le même résultat en montrant qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.*
3) *Donner dans $M_4(\mathbb{R})$ des exemples de matrices nilpotentes d'indices différents.*

Exercice 39. *Calculer la décomposition de Dunford de la matrice suivante en décomposant en éléments simples la fraction $\frac{1}{\chi_m(X)}$.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 40.

1. *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$(|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}, (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$$

On fera intervenir les matrices auxiliaires suivantes ou ω est une racine primitive de l'unité :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, B_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. *Calculer le déterminant de la matrice suivante ou $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i, j.*

$$(\frac{1}{a_i + b_j})_{1\leq i,j\leq n},$$

Exercice 41. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.*

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$. On pourra raisonner sur les espaces propres.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A.

(La matrice M est un produit de Kronecker des matrices A et B).

Exercice 42. *Soient A, B, C, D quatre matrices carrées de taille n, avec A inversible et $AC = CA$. Calculer le déterminant de*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

en fonction de celui de $AD - CB$. De quelle hypothèse peut on se passer ?

Exercice 43. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

1. *Calculer le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto AM$.*
2. *Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si elle est valeur propre de l'endomorphisme considéré.*

Exercice 44. *Pour tout entier naturel k, on définit le polynôme*

$$H_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} \end{cases}$$

1. *Montrer que H_0, H_1, H_2, H_3 forment une famille libre dans $\mathbb{Q}[X]$.*
2. *Quel est l'espace vectoriel F engendré par ces polynômes ?*
3. *Montrer que l'application $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ induit un endomorphisme sur F.*
4. *Quel est le polynôme caractéristique de la restriction de Δ à F ?*
5. *L'application est elle diagonalisable ?*

Exercice 45. *Soit $f = \lambda Id + N$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et N matrice nilpotente. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée.*

Exercice 46. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On rappelle que le commutant de f est le sous-ensemble $C(f)$ de $L(E)$ défini par $C(f) = \{g \in L(E) \,|\, fg = gf\}$. On suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f, et pour $i = 1, \ldots, p$, on note E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et on pose $d_i = \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i})$.*

1) *Montrer que $C(f)$ est une algèbre.*
2) *Montrer que g commute avec f si et seulement si g laisse invariant les sous espaces propres de f.*
3) *Montrer que $C(f)$ est isomorphe à $L(E_{\lambda_1}) \times \ldots \times L(E_{\lambda_p})$.*
4) *Montrer que $\dim(\mathrm{C(f)}) = \dim(\mathrm{E})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont simples.*
5) *Si f n'est plus diagonalisable, montrer que $\dim(\mathrm{C(f)}) \geq \dim \mathrm{E}$ en trigonalisant f.*

Exercice 47. *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A. Montrer que A et B n'ont aucune valeur propre commune si et seulement si $P(B)$ est inversible.*

Exercice 48. *Montrer que*

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

est diagonalisable.

Exercice 49. *L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables. On note E_{ij} les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.*

1) *Soit D la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, \mathrm{n})$. Pour $i, j = 1, \ldots, n$, on pose $F_{ij} = D + E_{ij}$ si $i \neq j$, et $F_{ii} = E_{ii}$. Montrer que les F_{ij} sont diagonalisables.*
2) *Montrer que les F_{ij} engendrent $M_n(\mathbb{R})$. (Si $A = (a_{ij})$ est donnée, on pourra considérer la matrice $A - \sum_{i\neq j} a_{ij}F_{ij}$.)*
3) *Conclure.*

Exercice 50. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie telle qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f^k soit inversible et diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.*

Exercice 51. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que son polynôme caractéristique et son polynôme minimal ont les mêmes facteurs irréductibles. Généraliser au cas des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 52. *Décrire les matrices $A \in M_6(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique et de polynôme minimal donnés par*

$$(X-2)^4(X-4)^2, (X-2)^3(X-4)$$

Exercice 53. *Si a est dans $\mathbb{R}^3$, on regarde l'application V*

$$V : x \mapsto a \wedge x$$

Calculer $exp(V)$.

2.2 Inégalités

Exercice 54. *Soit $a_1, \dots, a_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère*

$$D = det(< a_i, a_j >).$$

- *Montrer que $D \geq 0$. (On pensera à étudier la forme quadratique associée à la matrice).*
- *$D > 0$ si et seulement si les a_i sont indépendants.*
- *$D \leq \prod_i ||a_i||^2$.*

Exercice 55 (*Inégalité d'Hadamard*)**.** *Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$|det\ M|^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}|^2 \right)$$

et que, si tous les vecteurs colonnes de M sont non nuls, il y a égalité si, et seulement si, la famille des vecteurs colonnes de M est orthogonale.

Exercice 56. *Soit E un espace euclidien de dimension n.*

1. *On suppose qu'il existe $\alpha \neq 1$ et des vecteurs $u_1, ..., u_{n+1}$ de E de norme 1, tels que $\langle u_i, u_j \rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $\alpha = -\frac{1}{n}$.*
2. *Montrer qu'on peut trouver $u_1, ..., u_{n+1}$ de E de norme 1, tels que $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{n}$ pour tous $i \neq j$.*

Exercice 57. *Soit E un espace préhilbertien réel. Si $p \geq 1$ et $x_1, ..., x_{p+1} \in E$, on dit que la famille $(x_1, ..., x_{p+1})$ est obtusangle si, et seulement si,*

$$\langle x_i, x_j \rangle < 0$$

pour tous $i \neq j$.

1. *On suppose que la famille $(x_1, ..., x_{p+1})$ est obtusangle. Montrer que $(x_1, ..., x_p)$ est libre (on pourra raisonner par récurrence sur p).*
2. *Montrer que, dans un espace euclidien de dimension n, le nombre maximal d'éléments d'une famille obtusangle est $n + 1$.*

Exercice 58. *Soient u, v des endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien. Montrer que*

$$0 \leq tr(uv) \leq (tr\ u)\,(tr\ v)\,.$$

Exercice 59.

1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $det(I_n + A) \geq 1$.*
2. *Soient $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive et $T \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $det(S + T) \geq det\ S$.*

Exercice 60. *Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. On suppose que $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.*

Exercice 61. *Soit $n \geq 1$. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi(M) =^t AMA$ pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et calculer son déterminant.*

Exercice 62. *Calculer le minimum sur $a \in \mathbb{R}^n$ de*

$$\int_0^1 (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_0)^2 dx$$

Exercice 63. *Pour toute $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose*

$$\|A\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|,$$

où la norme dans le membre de droite est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\|A\| = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}},$$

où $\rho(A^*A)$ est la plus grande valeur propre de A^*A.

2.3 Groupe orthogonal

Exercice 64. *Soit H, K deux hyperplans d'un espace euclidien. Montrer que s_H, s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$ ou $K^\perp \subset H$.*

Exercice 65. *Compléter la matrice suivante en une matrice orthogonale positive*

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

Exercice 66. *Déterminer les sous groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ de cardinal $2, 3$ ou 4.*

Exercice 67. *Nature de la quadrique de $\mathbb{R}^3$*

$$xy + yz + zx = 1.$$

Exercice 68. *Soit trois droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Décrire l'ensemble des droites coupant les trois.*

Exercice 69. *On considère deux droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Décrire l'ensemble obtenu par rotation d'une droite autour de l'autre.*

Exercice 70. *Montrer que par un point d'un hyperboloide à une nappe passe deux droites incluses dans cet hyperboloide.*

2.4 Formes bilinéaires

Exercice 71. *Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f sa forme bilinéaire. Montrer que la différentielle de q en x vaut $y \to 2f(x,y)$.*

Exercice 72. *Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, y*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \tag{2.1}$$

— *Montrer que pour tout r rationnel on a $f(rx) = r^2 f(x)$.*
— *Montrer pour tous $x, y, z \in E$*

$$f(x+y+z) = f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z).$$

— *Montrer que*

$$(x,y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$$

est bilinéaire sur $\mathbb{Q}$.
— *Conclure qu'une norme vient d'un produit scalaire si son carré vérifie l'égalité 2.1.*

Exercice 73. *Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.*

Exercice 74. *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et G sa matrice de Gram définie par $G_{i,j} =< e_i, e_j >$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.*

1. *Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.*
2. *Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = Id$.*

Exercice 75. *Calculer les signatures des formes quadratiques*

$$xy, xy + yz + xz, x^2 + y^2 + xy$$

Exercice 76. *On appelle $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$q(P) = \int_{-1}^{1} P(t)P(-t)dt.$$

Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa signature.

Exercice 77. *Soit $n \geq 1$. On définit q_1, q_2, q_3 et q_4 sur $M_n(\mathbb{R})$ par*

$$q_1(M) = (tr\ M)^2,\ q_2(M) = tr\ ({}^tMM),\ q_3(M) = tr\ (M^2).$$

où $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique fixée. Montrer que q_1, q_2, q_3 sont des formes quadratiques et calculer leurs signatures.

Exercice 78. *Dans $\mathbb{R}^3$, soit z un vecteur fixe. Calculer la signature de*

$$(x,y) \mapsto < x \wedge y, z >$$

Même question pour

$$(x,y) \mapsto < x \wedge z, y >$$

Exercice 79. *Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. On suppose que $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.*

Exercice 80. *Soit $n \geq 1$. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi(M) =^t AMA$ pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et calculer son déterminant.*

Exercice 81. *Pour toute $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose*

$$\|A\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|,$$

où la norme dans le membre de droite est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\|A\| = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}},$$

où $\rho(A^*A)$ est la plus grande valeur propre de A^*A.

3 Géométrie

Exercice 82. *Soient u_1, u_2, v_1 v_2 des vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$ tels que $||u_1 - u_2|| = ||v_1 - v_2||$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.*

Exercice 83. *Montrer qu'une rotation vectorielle du plan est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites. Que dire de l'angle entre les deux droites ? Quels sont les élements du groupe orthogonal de déterminant négatif ?*

Exercice 84. *Soient ϕ et ψ deux rotations vectorielles dans l'espace euclidien de dimension deux. Montrer que le produit des deux est une rotation dont on déterminera l'angle. On utilisera la forme de la matrice d'une rotation.*

Exercice 85. *Soit T un triangle équilatéral. Montrer qu'une isométrie qui préserve T, fixe l'isobarycentre du triangle. Montrer qu'une telle isométrie permute les sommets de T. En déduire le nombre d'isométries préservant T, et les décrire.*

Exercice 86. *Les matrices suivantes sont elles dans le groupe orthogonal ? Si oui les décrire géométriquement.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Penser aux valeurs propres.

Exercice 87. *Décrire les coniques suivantes données par l'ensemble $f^{-1}(0)$ dans un repère orthonormé.*

i) $f(x, y) = xy - 1$,
ii) $f(x, y) = x^2$,
iii) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,
iv) $f(x, y) = x^2 - y$.

Elles sont toutes de type différent.

Exercice 88. *Soit D une droite du plan, F un point en dehors et $e > 0$ un réel. On considère l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$ ou H est la projection orthogonale de M sur la droite.*

1. *Si $e = 1$, montrer que c'est une parabole.*
2. *Si $e < 1$, montrer que c'est une ellipse.*
3. *Si $e > 1$, montrer que c'est une hyperbole.*

Exercice 89. *On fixe un repère affine du plan dans lequel un point a pour coordonnées (x, y). Reconnaître les transformations affines suivantes qui au point (x, y) associent le point (x', y').*

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}, \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}, \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}, \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + x) \end{cases}$$

Etudiez d'abord l'application linéaire associée via sa matrice.

Exercice 90. *Dans le plan euclidien, décrire la composée de*

1. *Deux rotations affines. On séparera les cas suivant les valeurs de la somme des angles.*
2. *Deux translations.*
3. *Deux homothéties. On fera plusieurs cas suivant le produit des deux rapports d'homothétie.*

3.1 Isométries dans l'espace de dimension trois

Exercice 91. ♠ *Si f est une isométrie d'un espace affine de dimension n, montrer qu'il existe un unique couple (g, u) ou u est un vecteur de l'espace vectoriel et g une isométrie ayant au moins un point fixe tels que $f = t_u \circ g = g \circ t_u$.*

1. *Montrer que si A est un endomorphisme orthogonal ,alors le noyau de $A - Id$ est égal à l'orthogonal de l'image de $A - Id$.*
2. *En déduire un u qui convient puis g.*
3. *Supposons que la décomposition n'est pas unique, dans quel espace se trouve $u - v$?*
4. *Conclure en prouvant que u, g commutent.*

Exercice 92. □ *Soient u_1, u_2, v_1 v_2 des vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$ tels que $||u_1 - u_2|| = ||v_1 - v_2||$. Montrer qu'il existe une rotation f telle que $f(u_1) = v_1$ et $f(u_2) = v_2$.*

Exercice 93. □ *Montrer qu'une rotation est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant l'axe de la rotation. De plus l'un des deux plans peut être pris de manière arbitraire.*

Exercice 94. *Soient ϕ et ψ deux rotations affines dans l'espace euclidien de dimension* 3. *Quand l'angle de $\psi \circ \phi$ est-il la somme des angles des deux rotations ?*

Exercice 95. *Quelle est la composée de* 3 *réflexions orthogonales de plans parallèles ?*

Exercice 96. *Décrire la composée de* 3 *réflexions de plans orthogonaux deux à deux.*

Exercice 97. *Dans $\mathbb{R}^3$ orienté, on note s_P la réflexion vectorielle de plan P.*

1) *Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour (par rapport à quelle droite ?)*
2) *Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de deux demi-tours est-elle un demi-tour ?*
3) *Montrer que $SO(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $SO(3)$.*

Exercice 98. ✠ *On note ρ_1 et ρ_2 deux rotations affines de $\mathbb{R}^3$ et $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$, montrer que :*

1. *Si ρ est une translation, alors $r_1 = r_2^{-1}$, en notant r_1, r_2 les parties linéaires de ρ_1 et ρ_2 respectivement. En déduire que ρ_1 et ρ_2 ont des axes parallèles.*
2. *Si ρ_1 et ρ_2 ont des axes coplanaires, alors ρ est une translation ou une rotation (décomposer chaque rotation en produit de réflexions par rapport à des plans bien choisis).*
3. *Si les axes de ρ_1 et ρ_2 ne sont pas coplanaires, alors ρ est un vissage dont la translation est non triviale (noter que si ρ est une rotation, alors elle a un point fixe O et l'axe de ρ_1 et l'axe de ρ_2 sont contenus dans le plan médiateur du segment $[O, \rho_2(O)]$).*

Exercice 99. *Soit R une rotation vectorielle d'angle θ et d'axe dirigé par u. Posons $\omega = \sin(\theta/2)u = (b, c, d)$ et $a = \cos(\theta/2)$. Montrer que pour tout vecteur x on a*

$$R(x) = x + 2a\omega \wedge x + 2\omega \wedge (\omega \wedge x)$$

3.2 Polyèdres et groupes d'isométries

3.3 Autour du tétraèdre

Exercice 100. $\square$ *Montrer que dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leur milieu.*

Exercice 101. *Soit G un sous-groupe d'ordre 3 du groupe alterné $\mathcal{A}_4$. Construire un tétraèdre dont le groupe des déplacements soit isomorphe à G.*

Exercice 102. *Par définition, un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont les côtés sont isométriques (autrement dit, c'est l'enveloppe convexe de quatre points A_1, ..., A_4 tels qu'il existe $a > 0$ vérifiant : pour tout $i \neq j$, $||A_iA_j|| = a$).*

Le jury a posé en 2008 la question suivante : est-ce qu'un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire est nécessairement régulier ?

1. *Dans un plan de $\mathbb{R}^3$, on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $CA(= CB) > AB$. On cherche l'ensemble des points $D \in \mathbb{R}^3$ vérifiant*
$$DA = DB = CA = CB \quad \text{et} \quad DC = AB.$$
Montrer que cet ensemble est à l'intersection de deux cercles.
2. *En déduire qu'il existe un tétraèdre non régulier avec des faces isométriques.*
Supposons maintenant que $ABCD$ soit un tétraèdre avec des faces de même aire.
3. *Soient I, J les pieds sur (AB) et (CD) de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD). Montrer que*
$$||\text{Vect}AB \wedge \text{Vect}AC||^2 = ||\text{Vect}AB \wedge \text{Vect}IJ||^2 + ||\text{Vect}AB \wedge \text{Vect}JC||^2,$$
$$||\text{Vect}AB \wedge \text{Vect}AD||^2 = ||\text{Vect}AB \wedge \text{Vect}IJ||^2 + ||\text{Vect}AB \wedge \text{Vect}JD||^2.$$
4. *En déduire une égalité de longueur.*
5. *Montrer que les faces du tétraèdre sont isométriques (on pourra considérer le retournement autour de la droite (IJ)).*

3.4 Groupes d'isométries

Exercice 103. ♠✠ *Soit G un sous groupe fini de $SO(3)$.*

1. *A chaque élément de G diffèrent de l'identité on lui associe son axe et les deux points sur la sphère unité. Montrer que G agit sur cet ensemble X : Si P est un pole fixe par g, on regardera le pole fixé par hgh^{-1}.*
2. *On note s le nombres d'orbites et ν_i le cardinal du stabilisateur de chaque orbite. En calculant le cardinal de $\{(g,x) \in (G,X), g.x = x\}$ de deux façons montrer que le nombre d'orbites vaut*
$$s = \frac{1}{|G|}\sum_g |Fix(g)| \quad \textbf{Formule de Burnside}.$$

3. *En déduire une relation entre $s, |G|$ et le cardinal de X. Montrer alors :*

$$2(1-\frac{1}{|G|}) = \sum_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{\nu_i}).$$

4. *Montrer que s vaut 2 ou 3.*
5. *Si $s = 2$, en déduire que G stabilise une droite. Conclure que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
6. *On suppose maintenant que G ne stabilise aucune droite.Montrer que $s = 3$.*
7. *On suppose alors $\nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$.*
8. *Montrer que ν_2 vaut 2 ou 3.*
9. *Si $\nu_2 = 2$, alors*
   — *Montrer que dans ce cas, on a $|G| = 2n$ avec $\nu_3 = n$. Notons x un pole de l'orbite O_3.*
   — *Considérer G_x montrer que ce groupe est cyclique, notons a son générateur. Vérifier que a fixe deux pôles.*
   — *Trouver s dans $G \setminus G_x$ tel que $s(x) = -x$.*
   — *Décrire s^2 et en déduire que s, sa génèrent G. Conclure.*
10. *Supposons donc $\nu_2 = 3$. Montrer que $\nu_1 = 2$ et que $\nu_2 = 3$.*
11. *En déduire que les seules possibilités pour $|G|$ et les ν_i sont*

$$(12, 2, 3, 3), (24, 2, 3, 4), (60, 2, 3, 5).$$

Exercice 104. ♠ *On considère un tétraèdre régulier,et $Is(T)$ son groupe d'isométries.*

1. *Montrer que si f est une isométrie préservant T, alors l'ensemble des points extrémaux est globalement invariant.*
2. *Construire un morphisme de groupe de $Is(T)$ dans $\mathfrak{S}_4$.*
3. *Montrer qu'il est injectif.*
4. *Construire une isométrie dont l'image par le morphisme soit une transposition.*
5. *En déduire $Is(T)$.*

Exercice 105. *Montrer que $\mathcal{A}_4$ est le seul sous groupe d'indice deux de $\mathfrak{S}_4$. En déduire $Is^+(T)$.*

Exercice 106. ♠ *On considère un cube C.*

1. *En étudiant les diagonales des faces, montrer qu'il existe deux tétraèdres réguliers inscrits dans ce cube ayant deux faces parallèles.*
2. *Soit s_0 la symétrie centrale par rapport au centre du cube. Montrer que s_0 commute avec tous les éléments de $Is(C)$.*
3. *En déduire l'existence d'une application de $Is(C)$ dans $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (On utilisera un exercice précédent).*
4. *Montrer que c'est un morphisme, puis un isomorphisme.*
5. *Trouver une isométrie positive du cube dont l'image par le morphisme soit de la forme $(\tau, 0)$ ou τ est une transposition.*

6. *En déduire que $Is^+(C)$ contient un sous groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ et qu'il est d'indice deux dans $Is(C)$. Conclure.*

Exercice 107. ✠ *Soit P un polyèdre et $Is(P)$ son groupe d'isométries. Montrer que $Is(P)$ est produit direct de $Is^+(P)$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe une symétrie centrale dans $Is(P)$. On définira une application de $Is(P)$ dans le produit en utilisant la symétrie centrale. Remarquez qu'en dimension deux le résultat est faux car la symétrie centrale est un déplacement.*

3.5 Coniques

Exercice 108. *On considère trois plans A, B, C non alignés du plan et soit M de coordonnées barycentriques (x, y, z) par rapport au repère A, B, C. Montrer que M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si*

$$p^2yz + q^2zx + r^2xy = 0$$

ou p, q, r sont les longueurs des côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

1. *On peut se restreindre au cas ou A, B, C sont sur le cercle unité.*
2. *Montrer alors que $p^2 = 2 - b\bar{c} - \bar{b}c$.*
3. *Calculer $|z|^2$ et conclure.*

Soit $f \in \mathbb{R}_2[X, Y]$ un polynôme de degré 2. **Une conique** est l'ensemble des points M du plan affine tels que dans un repère on ait $f(M) = 0$.

Exercice 109. □

1) *Montrer que si f est un polynôme de degré 2, alors pour tout $\Omega \in \mathcal{E}$, il existe une forme quadratique non nulle q, une forme linéaire L_Ω et une constante c_Ω tels que*

$$f(M) = q(\mathrm{Vect}\Omega M) + L_\Omega(\mathrm{Vect}\Omega M) + c_\Omega. \tag{3.2}$$

Montrer que q ne dépend pas de Ω.

2) *Calculer la différentielle de f en un point M_O de $\mathcal{E}$.*

On pourra dorénavant prendre la formule (1) comme **définition d'une conique**. Une conique est **à centre** s'il existe un point Ω tel que M est sur la conique si et seulement si le symétrique de M par rapport à Ω est sur la conique.

Exercice 110. □

1) *Soit $f(M) = q(\mathrm{Vect}OM) + L_O(\mathrm{Vect}OM) + c_O$ une conique. Montrer que Ω est un centre de la conique associée si et seulement si $2B(\mathrm{Vect}O\Omega, \cdot) + L_O = 0$, en notant B la forme bilinéaire symétrique associée à q.*
2) *Montrer que Ω est un centre si et seulement si $L_\Omega = 0$.*
3) *Comment trouver les centres d'une quadrique si f est donné en coordonnées par*

$$f(M) = \sum a_{ij}x_ix_j + \sum b_ix_i + c_O.$$

Une conique est dite **propre** si la forme quadratique Q_0 est non dégénérée.

Exercice 111. *Montrer que cette définition est consistante : si* $Q_O(u,z) = q(u) + L_O(u)z + c_O z^2$ *est non dégénérée, alors pour tout* $\Omega \in \mathcal{E}$, $Q_\Omega(u,z) = q(u) + L_\Omega(u)z + c_\Omega z^2$ *est non dégénérée. On pourra remarquer que* $Q_\Omega(u,z) = Q_O(u + z\mathrm{Vect}O\Omega, z)$.

Exercice 112. *Montrer qu'un point* (x,y) *est sur une conique si et seulement si il existe une matrice* B *telle que l'on ait*

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Trouver l'expression de B.

3.5.1 Propriétés

Exercice 113. □ *Les coniques suivantes, données dans un repère affine d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *de dimension* 2 *sont-elles à centre ? Sont-elles propres ? Dessinez les.*

i) $f(x,y) = xy$,
ii) $f(x,y) = x^2$,
iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,
iv) $f(x,y) = x^2 - y$.

Exercice 114. *Soit* $\mathcal{E}$ *un plan affine euclidien.*

1) *Soit* $\mathcal{E}$ *une ellipse. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'ellipse est une courbe paramétrée d'équation* $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$. *En déduire qu'une ellipse est connexe, compacte.*
2) *Soit* $\mathcal{H}$ *une hyperbole. Montrer qu'il existe un repère orthonormé dans lequel l'image de l'hyperbole est une courbe paramétrée d'équation* $t \mapsto (\pm a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$. *En déduire qu'une hyperbole possède deux composantes connexes non bornées.*
3) *Donner une paramétrisation d'une parabole. En déduire qu'une parabole est connexe, non bornée.*

Exercice 115. □ *Dans le plan euclidien, décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par*

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 1, \\ xy + \lambda(x+y) + 1 = 0, \\ y^2 = \lambda \\ x^2 - 2x, \\ x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0 \end{cases}$$

Le cas échéant, on donnera les axes, sommets, paramètres.

Exercice 116. *Donner une expression explicite de la tangente à une conique propre, sous forme cartésienne, puis sous forme paramétrée. Montrer qu'une droite est tangente à une ellipse si et seulement si elle coupe cette ellipse en un unique point (on pourra se ramener au cas du cercle). Cette propriété reste-t-elle vraie pour les hyperboles, paraboles ?*

Exercice 117. *Soit* e, α *des nombres réels avec* $e > 0$. *Identifier l'ensemble des points vérifiant en coordonnées polaires*

$$r = \frac{e}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}.$$

Exercice 118. *Soit* F *un foyer de l'ellipse* $\mathcal{C}$ *et soit* D *la directrice correspondante. Si* M *est un point de* $\mathcal{C}$*, soit* P *le point d'intersection de la perpendiculaire à* (MF) *en* F *et de la droite* D*. Alors la droite* (PM) *est tangente à* $\mathcal{C}$ *en* M*. (On rappelle que pour une ellipse, une droite est tangente si et seulement si elle a un unique point d'intersection avec l'ellipse). Même question lorsque* $\mathcal{C}$ *est une parabole.*

Exercice 119. *Soit* D *une droite du plan,* F *un point en dehors et* $e > 0$ *un réel. On considère l'ensemble des points* M *tels que* $\frac{MF}{MH} = e$ *ou* H *est la projection orthogonale de* M *sur la droite.*

1. *Si* $e = 1$*, montrer que c'est une parabole.*
2. *Si* $e < 1$*, montrer que c'est une ellipse.*
3. *Si* $e > 1$*, montrer que c'est une hyperbole.*

Exercice 120. *On considère une ellipse d'équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *et de foyers* F, F'*. Soient les deux nombres* $r = MF, r' = MF'$ *et*

$$f(M) = (r + r' + 2a)(r + r' - 2a)(r - r' + 2a)(r - r' - 2a)$$

1. *Montrer que* $r - r' - 2a$ *ne peut être nul.*
2. *En déduire que* $f(M) = 0$ *si et seulement si* $r + r' = 2a$*.*
3. *Calculer* $f(M)$*.*
4. *En déduire qu'un point est sur l'ellipse si et seulement si* $MF + MF' = 2a$*.*
5. *En déduire que la tangente à* M *à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle* FMF'*.*

Exercice 121. *On considère un cylindre coupé par un plan. Soient* S, S' *deux sphères intérieures au cylindre et tangentes à celui ci. On suppose qu'elles sont de part et d'autre du plan et et tangentes à celui ci en deux points. Montrer que ces points sont les foyers de l'ellipse.*

Exercice 122. *Soient* F, F' *deux points, on considère l'ensemble des poins* M *tels qu'il existe un réel positif* a *vérifiant : le cercle de centre* M *passant par* F *est tangent au cercle de centre* F' *de rayon* $2a$*. Faire le lien avec la définition usuelle de conique.*

Exercice 123. ✠♠*[Théorème de Pascal] On considère un hexagone de sommets* A, B, C, D, E, F *et on suppose que les points* P, Q, R *définis comme intersection des droites* $(AE) - (DB)$ *;* $(AF) - (DC)$ *;* $((BF) - (EC)$ *existent. Montrer que* P, Q, R *sont alignés si et seulement si l'hexagone est sur une conique :*

Pour cela on considère un repère barycentrique défini par A, B, C *:*

— *Calculer les équations des droites* (AE) *et* (DB)*.*
— *Trouver les coordonnées de* P, Q, R*.*
— *Donner une condition en termes de déterminant pour que* P, Q, R *soient alignés.*
— *Ecrire en terme de déterminant le fait que les points sont sur une même conique.*
— *Voir que les deux déterminants sont égaux.*

Exercice 124. *Soit E une ellipse de foyer F_1, F_2 et M extérieur à l'ellipse. On considère les deux tangentes à l'ellipse issue de M. Montrer que*

$$(MT_1, MF_1) = (MF_2, MT_2).$$

1. *On considère $\sigma_{MF_1} \circ \sigma_{MT_1}$ produit des symétries orthogonales par rapport aux deux droites.*
2. *Calculer l'image l'image du symétrique de F_1 par rapport à (MT_1).*
3. *Montrer que ce point est aligné avec T_1, F_2.*
4. *Conclure grâce à une propriété de la tangente de l'ellipse.*

Exercice 125. ✠♠*[Théorème de Marden] On considère un triangle ABC du plan. Soient z_1, z_2, z_3 les affixes des sommets, on pose $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.*

1. *Montrer que les points F, G d'affixes les racines de P' sont intérieurs au triangle.*
2. *Montrer qu'on a égalité entre les angles (AF, AB) et (AC, AG).*
3. *Considérer l'ellipse de foyers F, G tangente à (AB). Montrer qu'elle est tangente aux autres côtés du triangle.*
4. *Montrer que tout triangle est l'image d'un triangle équilatéral par une application affine. Quelle est l'image de cette ellipse ?*
5. *Conclure que l'ellipse passe par les milieux des côtés.*

Exercice 126. *Soit σ une permutation de σ_3 et a, b, c trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que les barycentres de $(1, \sigma(a)), (j, \sigma(b)), (j^2, \sigma(c))$ sont sur un cercle.*

Exercice 127. *Soit P un polynôme réel de degré trois. On considère*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = P(y)\}$$

1. *Montrer que cet ensemble est l'union d'une droite et d'une conique.*
2. *Trouver une CNS sur P pour que la conique soit une ellipse.*
3. *Dans ce cas trouver l'excentricité.*

Exercice 128. ✠ *Écrire l'équation d'une conique en coordonnées barycentriques et montrer qu'elle est toujours de la forme*

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$$

Trouver l'équation de l'ellipse de Steiner, et de l'ellipse circonscrite au triangle.

Exercice 129. ✠ *Soit C un cône de $\mathbb{R}^3$ et P un plan, soit P' le plan parallèle à P passant par le sommet du cône. Montrer que*

— *$P \cap C$ est une ellipse si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à un point.*
— *$P \cap C$ est une parabole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à une droite.*
— *$P \cap C$ est une hyperbole si et seulement si $P' \cap C$ est réduit à deux droites.*

3.5.2 Utilisation du résultant

Exercice 130. *Calculer le résultant* $Res_Y(P,Q)$ *des polynômes* $P = X^2 - XY + Y^2 - 1$ *et* $Q = 2X^2 + Y^2 - Y - 2$ *par rapport à la variable* Y *(autrement dit, on considère* P *et* Q *comme des polynômes à coefficients dans* $A = \mathbb{R}[X]$*). En déduire comment trouver les points d'intersection des ellipses d'équation* $P = 0$ *et* $Q = 0$.

Exercice 131. *Donner l'équation implicite de la courbe paramétrée :* $x(t) = t^2 + 1,\ y(t) = t^2 + t$. *On pourra considérer les polynômes* $X - T^2 - 1$ *et* $Y - T^2 - T$ *et éliminer* T.

3.6 Leçon 142 : utilisation de groupes en géométrie

Exercice 132. *Le cercle* $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ *possède t il une structure de groupe ? Si oui à quel groupe est il isomorphe ? A quel groupe de matrices est il isomorphe ?*

Exercice 133. *Le groupe des translations est il un sous groupe distingué du groupe affine du plan ? Quel est le quotient ?*

Exercice 134. *A quelle isométrie du tétraèdre régulier correspond* (12) *puis* (123) *et enfin* (1234) *?*

Exercice 135. *Trouver des générateurs de* $O(2)$ *puis de* $O(3)$.

3.7 Espaces affines, barycentres, groupe affine

Exercice 136. □

1. *Montrer que l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires à second membre nul est un espace vectoriel. Si les seconds membres ne sont pas nuls et qu'il existe une solution, c'est un espace affine.*
2. *Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un espace vectoriel. Si le second membre est non nul, c'est un espace affine (ce qu'on formule souvent en disant que toute solution de l'équation est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière).*
3. *Montrer que l'ensemble* $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = \pi\}$ *est un espace affine, trouver sa direction.*

Exercice 137. *Soient* d, d', d'' 3 *droites parallèles distinctes,* $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ *deux droites dont aucune n'est parallèle à* d. *Soient* $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$, $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$, $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$. *Montrer alors*

$$\frac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}.$$

On pourra commencer par le cas de deux droites parallèles.

Réciproquement, si un point B *de* $\mathcal{D}_1$ *vérifie l'égalité*

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \frac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}},$$

montrer alors $B = A''_1$.

(Remarque : Si A, B, C *sont 3 points alignés, et* u *un vecteur directeur de la droite qu'ils définissent, on peut écrire* $\mathrm{Vect}AB = \lambda u$ *et c'est ce nombre* λ *qu'on note* $\overline{AB}$. *Cette mesure algébrique dépend du choix de* u. *En revanche, le rapport* $\overline{AB}/\overline{AC}$ *n'en dépend pas.)*

Exercice 138 (Desargues, version plus simple)**.** ♠ *On considère trois droites concourantes en O non coplanaires. Sur chaque droite on considère deux points différents du point commun : a, a', b, b', c, c'. On suppose que les droites (bc) et $(b'c')$ se coupent ainsi que celles obtenues par permutation.*

1. *On note α, β, γ les trois points et on montre que la droite $(\alpha\beta)$ est à l'intersection de deux plans bien choisis.*
2. *Montrer que les trois points d'intersection sont alignés.*
3. *En déduire le théorème de Desargues en introduisant un point hors du plan.*

Exercice 139. □ *Montrer que les points de l'espace affine de dimension n , $(x_i)_{i=1\ldots n+1}$ de coordonnées barycentriques $(x_i(1), x_i(2), \ldots, x_i(n+1))$ pour tout $i = 1 \ldots n+1$ constituent une base affine si et seulement si*

$$\begin{vmatrix} x_1(1) & x_1(2) & \ldots & x_1(n+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_i(n+1)2 & x_i(2) & \ldots & x_i(n+1) & 1 \\ \vdots & \vdots & & & 1 \\ x_{n+1}(n+1)2 & x_{n+1}(2) & \ldots & x_{n+1}(n+1)) & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exercice 140. ♠ *Soit ABC un triangle non plat. Montrer que les coordonnées barycentriques d'un point M dans le repère affine (A, B, C) intérieur au triangle sont proportionnelles aux aires orientées des triangles MBC, MCA, MAB. On trouvera ces coordonnées via le produit vectoriel et un système linéaire.*

Exercice 141. *Montrer qu'une application est affine si et seulement si elle préserve les barycentres. Montrer que l'image d'un convexe par une application affine est un convexe.*

Exercice 142. □ *Montrer que l'ensemble des homothéties et translations est un sous-groupe de $GA(\mathcal{E})$.*

Exercice 143. *On considère l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^n$ de la forme $X \mapsto AX + B$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$.*

1. *Montrer qu'elles forment un groupe appelé groupe affine.*
2. *Montrer que c'est un produit semi-direct du groupe linéaire par le groupe des translations.*
3. *Montrer que ce groupe s'injecte dans $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.*

3.8 Angles

Exercice 144. *On considère un triangle ABC. On note a, b, c, R les mesures des côtés BC, AC, AB et du rayon du cercle circonscrit. On note α, β, γ les mesures des angles non orientés en A, B, C respectivement.*

1) Montrer que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

2) Montrer que

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Exercice 145. ✠ *Soient* D, D' *et* D'' *trois droites vectorielles de* $\mathbb{R}^3$*. Soient* u*,* u' *et* u'' *des vecteurs directeurs unitaires choisis de telle sorte que l'on pose*

$$u', u'' = \cos a, u'', u = \cos b.$$

Soit H *l'hyperplan vectoriel* $D''^{\perp}$ *et* x, x' *les projections orthogonales de* u *et* u' *sur* H*. On pose enfin* $v = \dfrac{x}{||x||}$ *et* $v' = \dfrac{x'}{||x'||}$ *et* α *désigne l'angle géométrique des vecteurs* v *et* v'*. Montrer que*

$$< u, u' >= \cos a \cos b + < v, v' > \sin a \sin b = \cos a \cos b + \cos \alpha \sin a \sin b.$$

En déduire que l'angle géométrique définit une distance sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ *donnée par*

$$d(D, D') = \arccos < u, u' >.$$

Exercice 146. ♠ *Soit* C *un cercle de centre* O *et* M, A, B *trois points dessus. Montrer le* **théorème de l'angle au centre** *:*

$$(OA, OB) = 2(MA, MB) \mod 2\pi$$

Soit τ *la tangente en* A *au cercle et* T *un point dessus. Montrer que*

$$(AT, AB) = (MA, MB) \mod \pi$$

Exercice 147. *Soient* A, B *deux points distincts du plan et* α *un réel. On considère l'ensemble*

$$\{M, (MA, MB) = \alpha \mod \pi\}$$

Montrer que c'est un cercle passant par A, B *dont la tangente en* A *vérifie pour tout point* T *dessus* $(AT, AB) = \alpha \mod \pi$*.*

C'est le **cercle capable d'angle** α.

Exercice 148. *Montrer que l'ensemble suivant est un arc de cercle du cercle précédent.*

$$\{M, (MA, MB) = \alpha \mod 2\pi\}$$

Exercice 149. ♠ *Montrer que quatre points sont cocycliques ou alignés si et seulement si*

$$(CA, CB) = (DA, DB) \mod \pi$$

3.9 Géométrie et calculs

Exercice 150. □ *Le point d'affixe* z *est sur la droite* (AB) *ou* a, b *sont les affixes des points si et seulement si*

$$det \begin{pmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 151. Lignes de niveaux. *Soient* a, b *deux complexes différents et* λ *un nombre réel. Montrer que :*

— *L'ensemble des solutions de* $|z-a| = \lambda|z-b|$ *est soit vide soit un point soit une droite soit un cercle.*
— *L'ensemble des solutions de* $|z-a| + |z-b| = \lambda$ *est vide, ou deux points ou un segment ou une ellipse.*
— *L'ensemble des solutions de* $Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \theta \mod \pi$ *est soit la droite* AB *soit un cercle privé de deux points.*
— $Arg(\frac{z-a}{z-b}) = \theta \mod 2\pi$ *est soit la droite privée du segment* $\theta = 0$ *soit le segment privé des bords, soit un arc de cercle privé de* A, B.

Exercice 152. *Montrer que quatre points distincts du plan* A, B, C, D *sont alignés ou cocycliques si et seulement si*

$$\frac{a-d}{b-d}\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$$

Exercice 153. *Soient* A, B, C *trois points non alignés et* a, b, c *les longueurs des côtés du triangle formé par ces points. Soit* S *l'aire du triangle, montrer alors :*

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$S = rp = (p-a)r_a = \frac{abc}{4R}$$

ou p *est le demi périmètre du triangle et* a, b, c *les longueurs des côtés.*

Exercice 154. *Soient* A, B, C *trois points non alignés et* a, b, c *les longueurs des côtés du triangle formé par ces points. Montrer*

1. *Le centre du cercle inscrit est barycentre de*
$$(A, a); (B, b); (C, c)$$
2. *Le centre du cercle circonscrit est barycentre de*
$$(A, \sin(2A)); (B, \sin(2B)); (C, \sin(2C))$$
3. *L'orthocentre est barycentre de*
$$(A, \tan(A)); (B, \tan(B)); (C, \tan(C))$$

3.10 Convexité

Exercice 155. *Trouver un ensemble fermé dont l'enveloppe convexe n'est pas fermée.*
Trouver un ensemble non convexe tel que pour tous $x, y \in C$ $\frac{x+y}{2}$ *soit dans* C.

Exercice 156. *Soient* C, C' *deux convexes de* $\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que l'ensemble* $\{\frac{M+N}{2}, M \in C, N \in C'\}$ *est un convexe.*
2. *Si* C, C' *sont deux segments de* $\mathbb{R}^3$*, déterminer l'ensemble précédent.*

Exercice 157. *Montrer qu'un ensemble est convexe si et seulement si tout point est barycentre à coefficients positifs de points de cet ensemble.*

Exercice 158. ♠ *Si* X *est une partie d'un espace affine de dimension* n*, montrer que tout point de son enveloppe convexe est barycentre à coefficients positifs d'une famille de* $n+1$ *points de* X*. (On supposera que le point est barycentre de* p *points avec* $p > n+1$ *et on se ramènera à* $p-1$ *points.) En déduire que l'enveloppe convexe d'un compact de* $\mathbb{R}^n$ *est compacte.*

3.11 Inégalités

Exercice 159. *Soit* $a_1, \ldots, a_n$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *On considère*

$$D = det(< a_i, a_j >).$$

— *Montrer que* $D \geq 0$. *(On pensera à étudier la forme quadratique associée à la matrice).*
— $D > 0$ *si et seulement si les* a_i *sont indépendants.*
— $D \leq \prod_i ||a_i||^2$.

Exercice 160 (*Inégalité d'Hadamard*)**.** *Soit* $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. *Montrer que*

$$|det\ M|^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}|^2 \right)$$

et que, si tous les vecteurs colonnes de M *sont non nuls, il y a égalité si, et seulement si, la famille des vecteurs colonnes de* M *est orthogonale.*