Exercices d'algèbre linéaire
Agrégation externe 2016-2017

N. Bédaride

Les exercices marqués d'un $\square$ sont à savoir faire absolument. Ceux marqués d'un ✠ peuvent servir de développement.

1 Espaces vectoriels

1.1 Généralités

Exercice 1. $\square$ *Soit E un espace vectoriel et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*

1) Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

2) On suppose que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. A-t-on $G = (F_1 \cap G) \oplus (F_2 \cap G)$?

3) Généraliser le résultat de la première question à un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels.

Exercice 2. $\square$ *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1) Rappeler pourquoi $\mathrm{Ker}(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) est un sous-espace vectoriel de E (respectivement de F).

2) Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.

3) Montrer que f est surjective si et seulement si f transforme toute famille génératrice de E en une famille génératrice de F.

4) Montrer que f est bijective si et seulement si f transforme toute base de E en une base de F.

Exercice 3. $\square$ *Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.*

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

2) On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

(ii) $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 4 (Espaces vectoriels quotients). □ *Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.*

1) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in F$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

On notera E/F l'ensemble quotient et $p : E \to E/F$ l'application naturelle de passage au quotient.

2) Montrer qu'il existe une unique structure d'espace vectoriel sur E/F telle que p soit une application linéaire. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(p)$.

3) On dit que F est de codimension finie dans E si E/F est de dimension finie, et on appelle codimension de F dans E la dimension de E/F. Cette codimension sera notée $\mathrm{codim}_E(F)$. Montrer que F est de codimension finie dans E si et seulement si F admet un supplémentaire G de dimension finie dans E et que dans ce cas $\dim(G) = \mathrm{codim}_E(F)$.

4) Soit f une application linéaire de source E. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $E/\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 5. □ *Montrer que dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont libres :*

(i) $(\sin, \cos)$.

(ii) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, où chaque P_n est un polynôme de degré n.*

(iii) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$*, où $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto |x - a| \in \mathbb{R}$.*

Exercice 6. *Soit $(G, +)$ un groupe abélien.*

1) Montrer que G peut être muni d'au plus une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2) Montrer que pour que G puisse être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) G est sans torsion

(ii) G est divisible, c'est-à-dire que pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y \in G$ tel que $ny = x$.

Exercice 7. *On note C l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et C_0 le sous-espace des suites qui convergent vers 0.*

a) On note Φ l'application de C dans $\mathbb{R}$ qui à chaque suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$ associe $\Phi(x) = \lim_n x_n$. Montrer que Φ est une forme linéaire sur C. Quel est son noyau ?

b) Etant donnée une suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$ on lui associe la suite $y = (y_k)_{k\geq 1}$ définie par $y_1 = \Phi(x)$ et pour $k = 1, 2, \ldots$ $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$. Montrer que $y \in C_0$. Montrer que l'application $u : C \to C_0$ ainsi définie est un isomorphisme.

c) On désigne par C_{st} le sous-espace de C des suites constantes. Montrer que $C = C_0 \oplus C_{st}$.

1.2 Dimension et dualité

Exercice 8. *Définir la dimension d'un espace vectoriel.*

Enoncer le théorème de la base incomplète.

Exercice 9. $\square$ *Montrer que tout sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie est de dimension finie.*

Exercice 10. $\square$ *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.*

Exercice 11. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.*

1) *Montrer que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.*
2) *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et (P) l'idéal engendré par P. Montrer que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est irréductible.*
3) *Montrer que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et calculer cette dimension.*

Exercice 12. *Soit $\mathbb{K}$ un corps fini (commutatif).*

1) *Montrer que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est un nombre premier p.*
2) *Montrer que le cardinal de $\mathbb{K}$ est une puissance de p.*

Exercice 13. $\square$ *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base donnée par $e_n = X^n$.*

1. *Montrer que le système dual ne forme pas une base de E^*.*
2. *Montrer que E^* est isomorphe à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Exercice 14. *Soit $x_0, \ldots, x_n$ des points différents de $[0, 1]$. Monter qu'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ réels tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait*

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i)$$

Exercice 15. $\square$ *Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque $X = (x, y)$ par $f_1(X) = x + y$ et $f_2(X) = x + 2y$.*

a) *Montrer que (f_1, f_2) est une base de $[\mathbb{R}^2]^*$.*
b) *Exprimer f_1 et f_2 à l'aide de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*
c) *Déterminer la base de $\mathbb{R}^2$ dont (f_1, f_2) est la base duale.*

Exercice 16. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$, on définit une forme linéaire e_i^* sur E par $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $e_i^*(e_i) = 1$.*

1) *On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les $(e_i^*)_{i\in I}$ forment une base du dual E^* et en déduire que E et E^* ont même dimension.*
2) *Si E est de dimension infinie, montrer que les $(e_i^*)_{i\in I}$ forment une famille libre. Cette famille est-elle génératrice ?*
3) *On suppose de nouveau que E est de dimension finie. Si $x \in E$, on définit une application $\phi_x : f \in E^* \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$. Montrer que ϕ_x est un élément de E^{**} et que l'application $x \in E \mapsto \phi_x \in E^{**}$ est un isomorphisme.*

Exercice 17.

1) Rappeler la définition de la trace d'une matrice carrée et redémontrer les propriétés principales de la trace.

2) Soit $f \in M_n(\mathbb{R})^*$ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.

3) Rappeler la définition de la trace d'un endomorphisme.

Exercice 18. *Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ coupe tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$.*

1.3 Dimension finie

Exercice 19. $\square$

1) Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs de coordonnées $(1,0,1)$, $(-1,1,2)$ et $(-2,2,2)$. Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base.

2) Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs suivants : $(1,1,1,1)$, $(2,2,3,-1)$, $(1,2,1,2)$, $(0,-1,2,1)$, $(0,1,2,3)$.

Exercice 20. $\square$ *Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x+y+z+t=0$ et $2x+3y-2z-2t=0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.*

Exercice 21. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Calculer la dimension de $F+G$ en fonction des dimensions de F, G et $F \cap G$.*

Exercice 22. *Soient u, v deux endomorphismes de E. Montrer que*

$$rg(u) - rg(v \circ u) = dim(Imu \cap Kerv)$$

Exercice 23. *Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :*

$$p+q \text{ est un projecteur } \iff p\circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p+q$.

Montrer que $rg(p) = tr(p)$ en dimension finie.

Exercice 24.

1) Montrer que $M_n(\mathbb{R})$ est somme directe de l'ensemble des matrices symétriques et de l'ensemble des matrices antisymétriques.

2) Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est somme directe de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires.

Exercice 25.

1) Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux corps commutatifs avec $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$. Montrer que $\mathbb{K}_2$ est de façon naturelle muni d'une structure de $\mathbb{K}_1$-espace vectoriel. On note $[\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1]$ la dimension (éventuellement infinie) de cet espace vectoriel.

2) Soit $\mathbb{K}_3$ un autre corps commutatif, avec $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$. Montrer que $[\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_1] < \infty$ si et seulement si $[\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_2] < \infty$ et $[\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1] < \infty$.

3) En déduire dans ce cas la formule

$$[\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_1] = [\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_2].[\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1]$$

Exercice 26 (Hyperplans)**.** □

Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E si H est de codimension 1 dans E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *H est un hyperplan de E.*
2. *Il existe une forme linéaire non nulle $f \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker} f$.*

Donner un exemple classique.

Exercice 27.

1) Montrer que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est de façon naturelle un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et donner la relation entre les dimensions correspondantes.

2) On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer que $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

Exercice 28. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G ont même dimension si et seulement s'ils ont un supplémentaire commun. (On pourra faire une récurrence sur la codimension de F.)*

1.4 Applications linéaires

Exercice 29. *Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $x \oplus y = xy$ et $\lambda \odot x = x^\lambda$. Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe à $(\mathbb{R}, +, .)$.*

Exercice 30 (Théorème du rang)**.**

1) Énoncer et démontrer le théorème du rang.

2) Montrer qu'une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective et si et seulement si elle est surjective.

3) Cette propriété est-elle vraie en dimension infinie ?

Exercice 31. *Soit n un entier naturel non nul, et soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. A toute permutation σ du groupe symétrique S_n, on associe l'unique endomorphisme f_σ de E tel que $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, pour $i = 1, \ldots, n$.*

1) Montrer que $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un morphisme injectif de S_n dans $GL(E)$.

2) Soit D le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur $\sum_{i=1}^n e_i$, et H celui formé des $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer que $E = H \oplus D$. (On pourra utiliser la base $(e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n)$ de H.)

3) Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les f_σ sont $\{0\}$, D, H, et E. (Si V est un tel sous-espace qui n'est pas inclus dans D, on pourra utiliser le fait que $e_1 - e_i \in V$ pour tout i.)

Exercice 32. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

1) Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

2) Déterminer le centre de $GL(E)$.

Exercice 33. *Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A admette un inverse à coefficients entiers.*

Exercice 34. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe deux automorphismes u et v de E tels que $f = u - v$.*

2 Réduction

2.1 Matrices équivalentes, matrices semblables

Exercice 35. *Montrer que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est de rang r si et seulement si il existe P, Q matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$ telles que*

$$PAQ = J_r$$

En déduire que $rg(A) = rg({}^tA)$.

Exercice 36.

1. *Montrer que si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables alors elles ont même déterminant, trace, rang, polynôme caractéristique et valeurs propres.*
2. *Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique forment un invariant global pour cette relation dans $M_2(\mathbb{R})$.*
3. *Est ce vrai dans $M_3(\mathbb{R})$?*
4. *Trouver un contre exemple en dimension plus grande avec des matrices nilpotentes.*

Exercice 37.

1) Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

2.2 Résultats classiques

Exercice 38. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel non-trivial F de E qui est stable par f et on note g la restriction de f à F, qu'on considère comme un endomorphisme de F. Montrer que le polynôme caractéristique de g divise celui de f.*

Exercice 39. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, on note E_λ le sous-espace propre associé.*

1) Montrer que E_λ est stable par f.

2) Montrer que des sous-espaces propres de f associés à différentes valeurs propres sont en somme directe.

Exercice 40. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$.*

1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P = P_1 ... P_k$, avec les polynômes P_i premiers entre eux deux à deux. Montrer que

$$\mathrm{Ker(P(f))} = \mathrm{Ker(P_1(f))} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker(P_k(f))}.$$

2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.

3) On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E stable par f. Montrer que si f est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est aussi diagonalisable.

Exercice 41. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On note P le polynôme caractéristique de f, et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \mathrm{Ker(f - \lambda Id)}$.*

1) On suppose que λ est une racine de P d'ordre α. Montrer que $\mathrm{dim(E_\lambda)} \leq \alpha$.

2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- *(i) f est diagonalisable.*
- *(ii) P est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ de P d'ordre α, on a $\mathrm{dim(E_\lambda)} = \alpha$.*
- *(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de f telles que $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$.*

Exercice 42. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $m \neq 0$ et f un endomorphisme de E.*

1) Montrer que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ (respectivement la suite $(\mathrm{Ker}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$) décroît strictement puis devient stationnaire(respectivement croît strictement puis devient stationnaire).

2) On suppose que f est nilpotent et on note n son indice de nilpotence (c'est-à-dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$).

1. *Montrer que $n \leq m$ en remarquant que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ décroît strictement jusqu'à $p = n$ puis devient stationnaire.*
2. *Retrouver le même résultat en montrant qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.*

3) Donner dans $M_4(\mathbb{R})$ des exemples de matrices nilpotentes d'indices différents.

Exercice 43. *Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Montrer que f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. En déduire que toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable.*

Exercice 44. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On pose $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(f) = 0\}$.*

1) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$, et en déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire M tel que I soit engendré par M. M est appelé le polynôme minimal *de f.*
2) Montrer que M divise le polynôme caractéristique de f.
3) Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si $M(\lambda) = 0$.
4) Si E est de dimension infinie, on peut encore définir I de la même manière. Est-il forcément non trivial ?

Exercice 45. *Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite stable ou un plan stable.*

Exercice 46. *Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier n avec $A^n = Id$. Montrer que $A^{12} = Id$.*

Exercice 47. *Trouver les matrices telles que $A^2 - 4A + 3Id = 0$.*

Exercice 48. *Trouver le commutant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.3 Calculs

Exercice 49. ☐ *Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes dans $\mathbb{C}$.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 50. ☐ *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^k, k \in \mathbb{N}$. Pour cela on décomposera en éléments simples $\frac{X^k}{M_A(X)}$.

Exercice 51. ☐ *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x + y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right.$$

Montrer qu'il existe une unique solution vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.

Exercice 52. ☐ *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 3v_n \end{array} \right.$$

Donner une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Exercice 53. *Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54. *Calculer la décomposition de Dunford de la matrice suivante en décomposant en éléments simples la fraction* $\frac{1}{\chi_m(X)}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Déterminants

Exercice 55.

1. *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$(|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}, (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$$

On fera intervenir les matrices auxiliaires suivantes ou ω *est une racine primitive de l'unité :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, B_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. *Calculer le déterminant de la matrice suivante ou* $a_i + b_j \neq 0$ *pour tous* i, j.

$$(\frac{1}{a_i + b_j})_{1\leq i,j\leq n},$$

Exercice 56. *Soient* A, B, C, D *quatre matrices carrées de taille* n*, avec* A *inversible et* $AC = CA$*. Calculer le déterminant de*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

en fonction de celui de $AD - BC$*. De quelle hypothèse peut on se passer ?*

Exercice 57. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. *Calculer le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto AM$.*
2. *Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si elle est valeur propre de l'endomorphisme considéré.*

Exercice 58. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients ± 1. Montrer que le déterminant est divisible par 2^{n-1} en utilisant des opérations élémentaires.*

4 Utilisation de la réduction

Exercice 59. *Montrer qu'une matrice M est nilpotente si pour tout entier k on a $tr(M^k) = 0$.*

Exercice 60.

1. *Soit $f = \lambda Id + N$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et N matrice nilpotente. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée.*
2. *Même question si f est quelconque.*

Exercice 61. ✠ *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On rappelle que le commutant de f est le sous-ensemble $C(f)$ de $L(E)$ défini par $C(f) = \{g \in L(E) \mid fg = gf\}$. On suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f, et pour $i = 1, \dots, p$, on note E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et on pose $d_i = \mathrm{dim}(\mathrm{E}_{\lambda_i})$.*

1) Montrer que $C(f)$ est une algèbre.

2) Montrer que g commute avec f si et seulement si g laisse invariant les sous espaces propres de f.

3) Montrer que $C(f)$ est isomorphe à $L(E_{\lambda_1}) \times \ldots \times L(E_{\lambda_p})$.

4) Montrer que $\mathrm{dim(C(f))} = \mathrm{dim(E)}$ si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont simples.

5) Si f n'est plus diagonalisable, montrer que $\mathrm{dim(C(f))} \geq \mathrm{dimE}$ en trigonalisant f.

Exercice 62. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux.*

1) On suppose que pour tout i, f_i est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant simultanément les f_i.

2) On suppose que pour tout i, f_i est trigonalisable. Montrer qu'il existe une base de E trigonalisant simultanément les f_i.

On pensera à faire une récurrence.

Exercice 63. *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A. Montrer que A et B n'ont aucune valeur propre commune si et seulement si $P(B)$ est inversible.*

Exercice 64. *Montrer que*

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

est diagonalisable.

Exercice 65. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker(f)} \oplus \mathrm{Im(f)}$.*

Exercice 66. *L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables. On note E_{ij} les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.*

1) *Soit D la matrice diagonale $D = \mathrm{diag(1, 2, \ldots, n)}$. Pour $i, j = 1, \ldots, n$, on pose $F_{ij} = D + E_{ij}$ si $i \neq j$, et $F_{ii} = E_{ii}$. Montrer que les F_{ij} sont diagonalisables.*
2) *Montrer que les F_{ij} engendrent $M_n(\mathbb{R})$. (Si $A = (a_{ij})$ est donnée, on pourra considérer la matrice $A - \sum_{i \neq j} a_{ij} F_{ij}$.)*
3) *Conclure.*

Exercice 67. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie telle qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f^k soit inversible et diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.*

Exercice 68. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que son polynôme caractéristique et son polynôme minimal ont les mêmes facteurs irréductibles. Généraliser au cas des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 69 (Groupes de matrices)**.** ✠ *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. L'objectif de cet exercice est d'étudier les groupes de matrices, c'est-à-dire les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont des groupes pour la multiplication des matrices.*

1) *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice idempotente. Montrer que M constitue à elle seule un groupe. En donner un exemple et en déduire que l'élément neutre d'un groupe de matrices n'est pas nécessairement la matrice identité I_n.*
2) *Montrer que soit aucune matrice d'un groupe de matrices n'est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$, soit elles le sont toutes. Dans ce cas, préciser l'élément neutre du groupe et l'inverse dans le groupe d'une matrice donnée.*
3) *Soit G un groupe de matrices non inversibles et soit J son élément neutre. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang r. (On pourra utiliser le fait que pour $M \in G$, on a $MJ = JM = M$.)*
4) *Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est J. Montrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \varphi)$.*
5) *Pour tout entier $r \leq n-1$, on note G_r l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{K})$ diagonales par blocs du type $M = \mathrm{diag(N, 0)}$, avec $N \in Gl_r(\mathbb{K})$. Montrer que G_r est un groupe de matrices et en préciser l'élément neutre J_r.*
6) *Soit G un groupe comme dans la question 3). Montrer que J est semblable à J_r.*
7) *Soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $J_r = P^{-1}JP$. Montrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un morphisme injectif de G dans G_r.*
8) *Conclure en décrivant tous les groupes de matrices de $M_n(\mathbb{K})$.*

Exercice 70. *Décrire les matrices $A \in M_6(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique et de polynôme minimal donnés par*

$$(X-2)^4(X-4)^2, (X-2)^3(X-4)$$

Exercice 71. ✠ *Montrer que tout endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$f = d + n$$

avec

- *d diagonalisable,*
- *n nilpotente,*
- *$d \circ n = n \circ d$.*

En déduire que l'exponentielle est surjective sur $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 72. ✠ *Montrer que l'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite par la norme euclidienne est la boule unité.*

Exercice 73. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un polynome P_x qui génère l'idéal*

$$\{P \in \mathbb{R}[X], P(f)(x) = 0\}$$

Montrer alors que P_x divise le polynôme minimal de f.

Exercice 74. ✠ *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme est dit semi-simple si pour tout espace stable par f, il existe un supplémentaire stable par f. Montrer alors :*

1. *Si le polynôme minimal est irréductible, alors f est semi-simple.*
2. *f est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles deux à deux distincts.*
3. *f est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Exercice 75. ✠ *Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que G est fini si et seulement si il existe e entier tel que tout élément de G vérifie $g^e = Id$.*

Exercice 76. ✠ *Une transvection est une matrice de la forme $Id + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Une dilatation est une matrice de la forme $Id + (\alpha - 1)E_{i,i}, \alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(\mathbb{R})$.*
3. *En déduire que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.*

Exercice 77. ✠ *Décrire l'algorithme donnant les invariants de similitudes pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$.*

Exercice 78. ✠ *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On note $s_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i$ pour tout entier i. Soit Q la forme quadratique donnée sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$Q(x) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} s_{i+j} x_i x_j$$

Montrer que la signature de Q détermine le nombre de racines réelles distinctes de P.