Exercices d'algèbre linéaire
Agrégation externe 2018-2019

N. Bédaride

1 Exercices basiques

Exercice 1. *Soit E un espace vectoriel et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*

1) Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

2) On suppose que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. A-t-on $G = (F_1 \cap G) \oplus (F_2 \cap G)$?

3) Généraliser le résultat de la première question à un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels.

Exercice 2 (Espaces vectoriels quotients)**.** *Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.*

1) Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par $x\mathcal{R}y$ si $x - y \in F$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

On notera E/F l'ensemble quotient et $p : E \to E/F$ l'application naturelle de passage au quotient.

2) Montrer qu'il existe une unique structure d'espace vectoriel sur E/F telle que p soit une application linéaire. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(p)$.

3) On dit que F est de codimension finie dans E si E/F est de dimension finie, et on appelle codimension de F dans E la dimension de E/F. Cette codimension sera notée $\mathrm{codim}_E(F)$. Montrer que F est de codimension finie dans E si et seulement si F admet un supplémentaire G de dimension finie dans E et que dans ce cas $\dim(G) = \mathrm{codim}_E(F)$.

4) Soit f une application linéaire de source E. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $E/\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3.

1. *Définir la dimension d'un espace vectoriel.*
2. *Énoncer le théorème de la base incomplète.*
3. *Montrer que tout sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie est de dimension finie.*

4. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.*

Exercice 4. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Calculer la dimension de $F + G$ en fonction des dimensions de F, G et $F \cap G$.*

Exercice 5. *Soit $\mathbb{K}$ un corps fini (commutatif).*

1) *Montrer que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est un nombre premier p.*
2) *Montrer que le cardinal de $\mathbb{K}$ est une puissance de p.*

Exercice 6. *Montrer que dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, les familles suivantes sont libres :*

(i) $(\sin, \cos)$.

(ii) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *où chaque P_n est un polynôme de degré n.*

(iii) $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$, *où $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto |x - a| \in \mathbb{R}$.*

Exercice 7. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.*

1) *Rappeler pourquoi $\mathrm{Ker}(f)$ (respectivement $\mathrm{Im}(f)$) est un sous-espace vectoriel de E (respectivement de F).*
2) *Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F.*
3) *Montrer que f est surjective si et seulement si f transforme toute famille génératrice de E en une famille génératrice de F.*
4) *Montrer que f est bijective si et seulement si f transforme toute base de E en une base de F.*

Exercice 8. *Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E.*

1) *Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.*
2) *On suppose de plus que E est de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

   (ii) $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

   (iii) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 9. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base donnée par $e_n = X^n$.*

1. *Montrer que le système dual ne forme pas une base de E^*.*
2. *Montrer que E^* est isomorphe à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Exercice 10. *Soient f_1 et f_2 les deux applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque $X = (x, y)$ par $f_1(X) = x + y$ et $f_2(X) = x + 2y$.*

a) *Montrer que (f_1, f_2) est une base de $[\mathbb{R}^2]^*$.*
b) *Exprimer f_1 et f_2 à l'aide de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*
c) *Déterminer la base de $\mathbb{R}^2$ dont (f_1, f_2) est la base duale.*

Exercice 11.

1) *Dans* $\mathbb{R}^3$*, on considère les vecteurs de coordonnées* $(1,0,1)$*,* $(-1,1,2)$ *et* $(-2,2,2)$*. Montrer que ces vecteurs forment une base de* $\mathbb{R}^3$ *et calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base.*
2) *Dans* $\mathbb{R}^4$*, trouver le rang de la famille de vecteurs suivants :* $(1,1,1,1)$*,* $(2,2,3,-1)$*,* $(1,2,1,2)$*,* $(0,-1,2,1)$*,* $(0,1,2,3)$*.*

Exercice 12. *Soit* F *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^4$ *défini par les équations* $x+y+z+t=0$ *et* $2x+3y-2z-2t=0$*. Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$*, en donner une base et déterminer un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercice 13.

1) *Montrer que* $M_n(\mathbb{R})$ *est somme directe de l'ensemble des matrices symétriques et de l'ensemble des matrices antisymétriques.*
2) *Montrer que l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est somme directe de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires.*

Exercice 14.

1) *Montrer que tout* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel est de façon naturelle un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et donner la relation entre les dimensions correspondantes.*
2) *On considère* $\mathbb{R}$ *comme un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel. Montrer que* $\mathbb{R}$ *est de dimension infinie.*

Exercice 15. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E*. Montrer que* F *et* G *ont même dimension si et seulement s'ils ont un supplémentaire commun. (On pourra faire une récurrence sur la codimension de* F*.)*

Exercice 16 (Théorème du rang)**.**

1) *Énoncer et démontrer le théorème du rang.*
2) *Montrer qu'une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective et si et seulement si elle est surjective.*
3) *Cette propriété est-elle vraie en dimension infinie ?*

Exercice 17. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{Z})$*. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* A *admette un inverse à coefficients entiers.*

Exercice 18. *Montrer que la matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est de rang* r *si et seulement si il existe* P, Q *matrices inversibles de* $M_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$PAQ = J_r$$

En déduire que $rg(A) = rg({}^tA)$*.*

Exercice 19. *Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes dans* $\mathbb{C}$*.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^k, k \in \mathbb{N}$. *Pour cela on décomposera en éléments simples* $\frac{X^k}{M_A(X)}$.

Exercice 21. *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x + y \\ y' & = & x + 2y \end{array} \right.$$

Montrer qu'il existe une unique solution vérifiant $x(0) = 1$ *et* $y(0) = 0$.

Exercice 22. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les deux suites définies par la donnée de* u_0 *et* v_0 *et les relations*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 3v_n \end{array} \right.$$

Donner une expression explicite de u_n *et* v_n *en fonction de* n, u_0 *et* v_0.

Exercice 23. *Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

2 Exercices

Exercice 24. *On note* C *l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et* C_0 *le sous-espace des suites qui convergent vers* 0.

a) On note Φ *l'application de* C *dans* $\mathbb{R}$ *qui à chaque suite* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *associe* $\Phi(x) = \lim\limits_{n} x_n$. *Montrer que* Φ *est une forme linéaire sur* C. *Quel est son noyau ?*

b) Etant donnée une suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$ *on lui associe la suite* $y = (y_k)_{k\geq 1}$ *définie par* $y_1 = \Phi(x)$ *et pour* $k = 1, 2, \ldots$ $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$. *Montrer que* $y \in C_0$. *Montrer que l'application* $u : C \to C_0$ *ainsi définie est un isomorphisme.*

c) On désigne par C_{st} *le sous-espace de* C *des suites constantes. Montrer que* $C = C_0 \oplus C_{st}$.

Exercice 25. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif.*

1) *Montrer que l'anneau* $\mathbb{K}[X]$ *est un anneau principal.*
2) *Soient* $P \in \mathbb{K}[X]$ *un polynôme de degré supérieur ou égal à* 1 *et* (P) *l'idéal engendré par* P. *Montrer que* $\mathbb{K}[X]/(P)$ *est un corps si et seulement si* P *est irréductible.*
3) *Montrer que* $\mathbb{K}[X]/(P)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et calculer cette dimension.*

Exercice 26. *Soit* $x_0, \dots, x_n$ *des points différents de* $[0,1]$.

1. *On définit* $f_i : P \mapsto P(x_i)$ *pour* $i = 0, \dots, n$. *Montrer que* $f_0, \dots, f_n$ *forment une base de* $\mathbb{R}_n[X]$. *Monter qu'il existe* $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ *réels tels que pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *on ait*

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i)$$

2. *Trouver la base duale.*

Exercice 27. *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* $(e_i)_{i \in I}$ *une base de* E. *Pour tout* $i \in I$, *on définit une forme linéaire* e_i^* *sur* E *par* $e_i^*(e_j) = 0$ *si* $i \neq j$ *et* $e_i^*(e_i) = 1$.

1) *On suppose que* E *est de dimension finie. Montrer que les* $(e_i^*)_{i \in I}$ *forment une base du dual* E^* *et en déduire que* E *et* E^* *ont même dimension.*
2) *Si* E *est de dimension infinie, montrer que les* $(e_i^*)_{i \in I}$ *forment une famille libre. Cette famille est-elle génératrice ?*
3) *On suppose de nouveau que* E *est de dimension finie. Si* $x \in E$, *on définit une application* $\phi_x : f \in E^* \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$. *Montrer que* ϕ_x *est un élément de* E^{**} *et que l'application* $x \in E \mapsto \phi_x \in E^{**}$ *est un isomorphisme.*

Exercice 28.

1) *Rappeler la définition de la trace d'une matrice carrée et redémontrer les propriétés principales de la trace.*
2) *Soit* $f \in M_n(\mathbb{R})^*$ *une forme linéaire sur* $M_n(\mathbb{R})$. *Montrer qu'il existe une matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que pour toute matrice* $X \in M_n(\mathbb{R})$, $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.
3) *Rappeler la définition de la trace d'un endomorphisme.*

Exercice 29. *Montrer que* $GL_n(\mathbb{R})$ *coupe tout hyperplan de* $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 30. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f, f_1, \dots, f_p$ *des formes linéaires. Montrer que* f *est combinaison linéaire des* $f_i, i = 1 \dots p$ *si et seulement si* $\cap_i Ker f_i$ *est contenu dans* $Ker f$.

Exercice 31. *Soient* u, v *deux endomorphismes de* E. *Montrer que*

$$rg(u) - rg(v \circ u) = dim(Imu \cap Kerv)$$

Exercice 32. *Soient* p, q *deux projecteurs. Montrer les équivalences :*

$$p + q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$.

Montrer que $rg(p) = tr(p)$ *en dimension finie.*

Exercice 33.

1) *Soient $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux corps commutatifs avec $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2$. Montrer que $\mathbb{K}_2$ est de façon naturelle muni d'une structure de $\mathbb{K}_1$-espace vectoriel. On note $[\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1]$ la dimension (éventuellement infinie) de cet espace vectoriel.*
2) *Soit $\mathbb{K}_3$ un autre corps commutatif, avec $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_3$. Montrer que $[\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_1] < \infty$ si et seulement si $[\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_2] < \infty$ et $[\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1] < \infty$.*
3) *En déduire dans ce cas la formule*

$$[\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_1] = [\mathbb{K}_3 : \mathbb{K}_2].[\mathbb{K}_2 : \mathbb{K}_1]$$

Exercice 34 (Hyperplans)**.** *Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E si H est de codimension 1 dans E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *H est un hyperplan de E.*
2. *Il existe une forme linéaire non nulle $f \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker} f$.*

Donner un exemple classique.

Exercice 35. *Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $x \oplus y = xy$ et $\lambda \odot x = x^\lambda$. Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \odot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe à $(\mathbb{R}, +, .)$.*

Exercice 36. *Soit n un entier naturel non nul, et soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. A toute permutation σ du groupe symétrique S_n, on associe l'unique endomorphisme f_σ de E tel que $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, pour $i = 1, \ldots, n$.*

1) *Montrer que $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un morphisme injectif de S_n dans $GL(E)$.*
2) *Soit D le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur $\sum_{i=1}^n e_i$, et H celui formé des $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Montrer que $E = H \oplus D$. (On pourra utiliser la base $(e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n)$ de H.)*
3) *Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par tous les f_σ sont $\{0\}$, D, H, et E. (Si V est un tel sous-espace qui n'est pas inclus dans D, on pourra utiliser le fait que $e_1 - e_i \in V$ pour tout i.)*

Exercice 37. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*

1) *Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.*
2) *Déterminer le centre de $GL(E)$.*

Exercice 38. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe deux automorphismes u et v de E tels que $f = u - v$.*

Exercice 39. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients ± 1. Montrer que le déterminant est divisible par 2^{n-1} en utilisant des opérations élémentaires.*

Exercice 40. *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un polynome P_x qui génère l'idéal*

$$\{P \in \mathbb{R}[X], P(f)(x) = 0\}$$

Montrer alors que P_x divise le polynôme minimal de f.

Exercice 41. *Décrire les matrices $A \in M_6(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique et de polynôme minimal donnés par*

$$(X-2)^4(X-4)^2, (X-2)^3(X-4)$$

Exercice 42.

1. *Montrer que si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables alors elles ont même déterminant, trace, rang, polynôme caractéristique et valeurs propres.*
2. *Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique forment un invariant global pour cette relation dans $M_2(\mathbb{R})$ et dans $M_3(\mathbb{R})$.*
3. *Trouver un contre exemple en dimension plus grande avec des matrices nilpotentes.*

Exercice 43. *Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite stable ou un plan stable.*

Exercice 44. *Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier n avec $A^n = Id$. Montrer que $A^{12} = Id$.*

Exercice 45. *Trouver les matrices telles que $A^2 - 4A + 3Id = 0$.*

Exercice 46. *Trouver le commutant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 47. *Calculer la décomposition de Dunford de la matrice suivante en décomposant en éléments simples la fraction $\frac{1}{\chi_m(X)}$.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 48. *Montrer que*

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

est diagonalisable.

Exercice 49.

1. *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$(|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}, (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$$

On fera intervenir les matrices auxiliaires suivantes ou ω est une racine primitive de l'unité :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, B_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. *Calculer le déterminant de la matrice suivante ou $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i, j.*

$$(\frac{1}{a_i + b_j})_{1\leq i,j\leq n},$$

3 Exercices

Exercice 50.

1) *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.*
2) *En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 51. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel non-trivial F de E qui est stable par f et on note g la restriction de f à F, qu'on considère comme un endomorphisme de F. Montrer que le polynôme caractéristique de g divise celui de f.*

Exercice 52. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, on note E_λ le sous-espace propre associé.*

1) *Montrer que E_λ est stable par f.*
2) *Montrer que des sous-espaces propres de f associés à différentes valeurs propres sont en somme directe.*

Exercice 53. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$.*

1) *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que $P = P_1 ... P_k$, avec les polynômes P_i premiers entre eux deux à deux. Montrer que*

$$\mathrm{Ker(P(f)) = Ker(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus Ker(P_k(f))}.$$

2) *Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(f) = 0$.*
3) *On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E stable par f. Montrer que si f est diagonalisable, alors $f_{|F}$ est aussi diagonalisable.*

Exercice 54. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On note P le polynôme caractéristique de f, et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda = \mathrm{Ker(f - \lambda Id)}$.*

1) *On suppose que λ est une racine de P d'ordre α. Montrer que* $\mathrm{dim(E_\lambda)} \leq \alpha$.

2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) f est diagonalisable.

(ii) P est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ de P d'ordre α, on a $\dim(\mathrm{E}_\lambda) = \alpha$.

(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de f telles que $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$.

Exercice 55. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $m \neq 0$ et f un endomorphisme de E.*

1) Montrer que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ (respectivement la suite $(\mathrm{Ker}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$) décroît strictement puis devient stationnaire(respectivement croît strictement puis devient stationnaire).

2) On suppose que f est nilpotent et on note n son indice de nilpotence (c'est-à-dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$).

1. *Montrer que $n \leq m$ en remarquant que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ décroît strictement jusqu'à $p = n$ puis devient stationnaire.*
2. *Retrouver le même résultat en montrant qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.*

3) Donner dans $M_4(\mathbb{R})$ des exemples de matrices nilpotentes d'indices différents.

Exercice 56. *Soient E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Montrer que f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. En déduire que toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable.*

Exercice 57. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On pose $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(f) = 0\}$.*

1) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0\}$, et en déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire M tel que I soit engendré par M. M est appelé le polynôme minimal *de f.*

2) Montrer que M divise le polynôme caractéristique de f.

3) Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si et seulement si $M(\lambda) = 0$.

4) Si E est de dimension infinie, on peut encore définir I de la même manière. Est-il forcément non trivial ?

Exercice 58. *Soient A, B, C, D quatre matrices carrées de taille n, avec A inversible et $AC = CA$. Calculer le déterminant de*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

en fonction de celui de $AD - BC$. De quelle hypothèse peut on se passer ?

Exercice 59. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

1. *Calculer le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto AM$.*
2. *Montrer que λ est valeur propre de M si et seulement si elle est valeur propre de l'endomorphisme considéré.*

Exercice 60. *Montrer qu'une matrice M est nilpotente si pour tout entier k on a $tr(M^k) = 0$.*

Exercice 61.

1. *Soit $f = \lambda Id + N$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et N matrice nilpotente. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée.*
2. *Même question si f est quelconque.*

Exercice 62. ✠ *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On rappelle que le commutant de f est le sous-ensemble $C(f)$ de $L(E)$ défini par $C(f) = \{g \in L(E) \mid fg = gf\}$. On suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f, et pour $i = 1, \ldots, p$, on note E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et on pose $d_i = \mathrm{dim}(\mathrm{E}_{\lambda_i})$.*

1) *Montrer que $C(f)$ est une algèbre.*
2) *Montrer que g commute avec f si et seulement si g laisse invariant les sous espaces propres de f.*
3) *Montrer que $C(f)$ est isomorphe à $L(E_{\lambda_1}) \times \ldots \times L(E_{\lambda_p})$.*
4) *Montrer que $\mathrm{dim}(\mathrm{C(f)}) = \mathrm{dim}(\mathrm{E})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont simples.*
5) *Si f n'est plus diagonalisable, montrer que $\mathrm{dim}(\mathrm{C(f)}) \geq \mathrm{dimE}$ en trigonalisant f.*

Exercice 63. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux.*

1) *On suppose que pour tout i, f_i est diagonalisable. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant simultanément les f_i.*
2) *On suppose que pour tout i, f_i est trigonalisable. Montrer qu'il existe une base de E trigonalisant simultanément les f_i.*

On pensera à faire une récurrence.

Exercice 64. *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$. On note P le polynôme caractéristique de A. Montrer que A et B n'ont aucune valeur propre commune si et seulement si $P(B)$ est inversible.*

Exercice 65. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe un polynôme annulateur P de f vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que $E = \mathrm{Ker(f)} \oplus \mathrm{Im(f)}$.*

Exercice 66. *L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une base de $M_n(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables. On note E_{ij} les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.*

1) *Soit D la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, \mathrm{n})$. Pour $i, j = 1, \ldots, n$, on pose $F_{ij} = D + E_{ij}$ si $i \neq j$, et $F_{ii} = E_{ii}$. Montrer que les F_{ij} sont diagonalisables.*
2) *Montrer que les F_{ij} engendrent $M_n(\mathbb{R})$. (Si $A = (a_{ij})$ est donnée, on pourra considérer la matrice $A - \sum_{i\neq j} a_{ij}F_{ij}$.)*
3) *Conclure.*

Exercice 67. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie telle qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f^k soit inversible et diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.*

Exercice 68. *Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Montrer que son polynôme caractéristique et son polynôme minimal ont les mêmes facteurs irréductibles. Généraliser au cas des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 69 (Groupes de matrices)**.** ✠ *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. L'objectif de cet exercice est d'étudier les groupes de matrices, c'est-à-dire les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont des groupes pour la multiplication des matrices.*

1) *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice idempotente. Montrer que M constitue à elle seule un groupe. En donner un exemple et en déduire que l'élément neutre d'un groupe de matrices n'est pas nécessairement la matrice identité I_n.*
2) *Montrer que soit aucune matrice d'un groupe de matrices n'est inversible dans $M_n(\mathbb{K})$, soit elles le sont toutes. Dans ce cas, préciser l'élément neutre du groupe et l'inverse dans le groupe d'une matrice donnée.*
3) *Soit G un groupe de matrices non inversibles et soit J son élément neutre. Montrer que tous les éléments de G ont le même rang r. (On pourra montrer que deux éléments on même image et même noyau.)*
4) *Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est J. Montrer que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - \varphi)$.*
5) *Pour tout entier $r \leq n-1$, on note G_r l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{K})$ diagonales par blocs du type $M = \mathrm{diag}(\mathrm{N}, 0)$, avec $N \in Gl_r(\mathbb{K})$. Montrer que G_r est un groupe de matrices et en préciser l'élément neutre J_r.*
6) *Soit G un groupe comme dans la question 3). Montrer que J est semblable à J_r.*
7) *Soit $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $J_r = P^{-1}JP$. Montrer que l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un morphisme injectif de G dans G_r.*
8) *Conclure.*

Exercice 70. ✠ *Montrer que tout endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$f = d + n$$

avec

— *d diagonalisable,*
— *n nilpotente,*
— *$d \circ n = n \circ d$.*

En déduire que l'exponentielle est surjective sur $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 71. ✠ *On considère $u \in M_n(\mathbb{R})$ qui commute avec ${}^tA$.*

1. *Montrer que si F est stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.*
2. *Traiter le cas $n = 2$.*

3. *Montrer que u possède soit un plan soit une droite stable.*
4. *En déduire par récurrence que u peut s'écrire dans une BON sous la forme diagonale par blocs, avec des nombres réels et des matrices $2 * 2$ de similitudes.*

Exercice 72. ✠ *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme est dit semi-simple si pour tout espace stable par f, il existe un supplémentaire stable par f. Montrer alors :*

1. *Si le polynôme minimal est irréductible, alors f est semi-simple.*
2. *f est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles deux à deux distincts.*
3. *f est semi-simple si et seulement si il est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Exercice 73. ✠ *Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que G est fini si et seulement si il existe e entier tel que tout élément de G vérifie $g^e = Id$. Indications :*
- *Montrer que tout élément de G est diagonalisable.*
- *Considérer une famille génératrice $(g_1, \ldots, g_k)$ de l'espace vectoriel engendré par G et l'application $g \mapsto (tr(gg_i))_{i \leq k}$.*

Exercice 74. ✠ *Une transvection est une matrice de la forme $Id + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Une dilatation est une matrice de la forme $Id + (\alpha - 1)E_{i,i}, \alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Montrer que les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{R})$:*
   - *Montrer qu'il suffit de trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transformant une matrice inversible en l'identité.*
   - *Montrer que l'on peut toujours se ramener au cas $a_{1,1} = 1$ (on séparera les cas ou $a_{1,1}$ est le seul terme non nul d'une ligne/colonne ou non).*
   - *Raisonner par récurrence.*
2. *Montrer que les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(\mathbb{R})$.*