Exercices de révision
Agrégation interne 2020-2021

N. Bédaride+ Sary Drappeau *

Résumé

Exercices de base en algèbre linéaire, géométrie et groupes. Les indications sont en rouge.

1 Algèbre linéaire

Exercice 1. *Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R}), B \in M_{2,2}(\mathbb{R}), C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que* $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver x. On pourra étudier le rang des matrices.

Exercice 2. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t AA$. Montrer que $rg(A) = rg(B)$. Trouver un contre exemple dans $M_2(\mathbb{C})$. On étudiera les noyaux des matrices.*

Exercice 3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est non inversible si et seulement si il existe P inversible telle que PA soit nilpotente.*

Exercice 4. *Soit $x_0, \ldots, x_n$ des points différents de $[0, 1]$. Monter qu'il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ réels tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait*

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i).$$

Cherchez une base de l'espace dual.

Exercice 5. *Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :*

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \rightarrow & \phi_i(P) = P(x_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \rightarrow & \psi_i(P) = P'(x_i) \end{array}$$

1. *Montrer que $(\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ est une base de E^*.*
2. *Chercher la base de E duale de celle ci. On notera $P_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.*

*Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille, France. Email : nicolas.bedaride@univ-amu.fr

Exercice 6. *Soient u, v deux endomorphismes de E. Montrer que*

$$rg(u) - rg(v \circ u) = dim(Imu \cap Kerv).$$

Pensez au théorème du rang.

Exercice 7. *Soient p, q deux projecteurs. Montrer les équivalences :*

$$p + q \text{ est un projecteur } \Longleftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$. Montrer que $rg(p) = tr(p)$ en dimension finie. on regardera les valeurs propres de p.

Exercice 8. *Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe un entier n avec $A^n = Id$. Montrer que $A^{12} = Id$. On pourra chercher les valeurs propres de A.*

Exercice 9. *Trouver les matrices telles que $A^2 - 4A + 3Id = 0$. On cherchera les valeurs propres de A.*

Exercice 10. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 3v_n \end{cases}$$

Donner une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0. On introduira une matrice dont on cherchera les puissances. Pour trouver les puissances, on pensera aux valeurs propres.

Exercice 11. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + Id$. Montrer que $det(A)$ est strictement positif. On peut tracer le graphe d'une fonction polynômiale de degré trois.*

Exercice 12. *Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous $z_1,\ldots, z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :*

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.

ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.
Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n - 1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

Exercice 13. ✠*Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite stable ou un plan stable.* *Un polynôme à coefficients réels n'admet pas forçément de racine réelle, mais a toujours des racines complexes.*

Exercice 14. *Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie telle qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que f^k soit inversible et diagonalisable. Montrer que f est diagonalisable.* *On cherchera le nombre de racines complexes de l'équation $X^k = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.*

2 Géométrie

Exercice 1. *Soient* u_1, u_2, v_1 v_2 *des vecteurs unitaires dans* $\mathbb{R}^3$ *tels que* $||u_1 - u_2|| = ||v_1 - v_2||$. *Montrer qu'il existe une rotation* f *telle que* $f(u_1) = v_1$ *et* $f(u_2) = v_2$.

Exercice 2. *Montrer qu'une rotation vectorielle du plan est le produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites. Que dire de l'angle entre les deux droites ? Quels sont les élements du groupe orthogonal de déterminant négatif ?*

Exercice 3. *Soient* ϕ *et* ψ *deux rotations vectorielles dans l'espace euclidien de dimension deux. Montrer que le produit des deux est une rotation dont on déterminera l'angle. On utilisera la forme de la matrice d'une rotation.*

Exercice 4. *Soit* T *un triangle équilatéral. Montrer qu'une isométrie qui préserve* T*, fixe l'isobarycentre du triangle. Montrer qu'une telle isométrie permute les sommets de* T*. En déduire le nombre d'isométries préservant* T*, et les décrire.*

Exercice 5. *Les matrices suivantes sont elles dans le groupe orthogonal ? Si oui les décrire géométriquement.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Penser aux valeurs propres.

Exercice 6. *Décrire les coniques suivantes données par l'ensemble* $f^{-1}(0)$ *dans un repère orthonormé.*

i) $f(x, y) = xy - 1$,
ii) $f(x, y) = x^2$,
iii) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,
iv) $f(x, y) = x^2 - y$.

Elles sont toutes de type différent.

Exercice 7. *Soit* D *une droite du plan,* F *un point en dehors et* $e > 0$ *un réel. On considère l'ensemble des points* M *tels que* $\frac{MF}{MH} = e$ *ou* H *est la projection orthogonale de* M *sur la droite.*

1. *Si* $e = 1$*, montrer que c'est une parabole.*
2. *Si* $e < 1$*, montrer que c'est une ellipse.*
3. *Si* $e > 1$*, montrer que c'est une hyperbole.*

Exercice 8. *On fixe un repère affine du plan dans lequel un point a pour coordonnées* (x, y). *Reconnaître les transformations affines suivantes qui au point* (x, y) *associent le point* (x', y').

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}, \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}, \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 1 \end{cases}, \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y + x) \end{cases}$$

Etudiez d'abord l'application linéaire associée via sa matrice.

Exercice 9. *Dans le plan euclidien, décrire la composée de*

1. *Deux rotations affines. On séparera les cas suivant les valeurs de la somme des angles.*
2. *Deux translations.*
3. *Deux homothéties. On fera plusieurs cas suivant le produit des deux rapports d'homothétie.*

3 Groupes

Exercice 10.

1. *Soit G le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.*
   (a) *Donner la liste des éléments de G.*
   (b) *Quel est l'ordre de $\overline{3}$? G est-il cyclique ?*

Penser à la fonction d'Euler.

Exercice 11. *Donner un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.*

Utiliser le lemme de Bezout

Exercice 12. *Quels sont les automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$?*
Différence entre les cas $n = 5$ et $n = 8$?

Ce sont des groupes.

Exercice 13. *Le cercle $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ possède t il une structure de groupe ? Si oui à quel groupe est il isomorphe ? A quel groupe de matrices est il isomorphe ?*

On considère le morphisme de groupes

$$\mathbb{R} \to S^1$$

$$t \mapsto f(t) = e^{it},$$

Ensuite on considère

$$e^{it} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Exercice 14. *Le groupe des translations est il un sous groupe distingué du groupe affine du plan ? Quel est le quotient ?*

Exercice 15. *Montrer que A_4 n'est pas un groupe simple.*

Penser à des éléments d'ordre deux.

Exercice 16. *Trouver les*
— *Morphismes de S_n dans S_{n-1} pour $n > 4$.*
— *Morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Raisonner sur le noyau, ou sur l'image.

Exercice 17. *Si p est un nombre premier, quel est le cardinal du sous-ensemble des carrés modulo p :*

$$\{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, x = y^2\} \text{ ?}$$

Se ramener à un groupe et considérer le morphisme $x \mapsto x^2$.

Exercice 18. *Montrer qu'un anneau A est un corps si et seulement si les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.*