Exercices
Agrégation interne 2019-2020

N. Bédaride

1 Basiques en algèbre linéaire

Exercice 1. □ *Soit E un espace vectoriel et soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.*

1) *Montrer que $E = F_1 \oplus F_2$ si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.*
2) *On suppose que $E = F_1 \oplus F_2$. Soit G un sous-espace vectoriel de E. A-t-on $G = (F_1 \cap G) \oplus (F_2 \cap G)$?*
3) *Généraliser le résultat de la première question à un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels.*

Exercice 2. *Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R}), B \in M_{2,2}(\mathbb{R}), C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver x.*

Exercice 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i \in I}$ une base de E. Pour tout $i \in I$, on définit une forme linéaire e_i^* sur E par $e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $e_i^*(e_i) = 1$. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les $(e_i^*)_{i \in I}$ forment une base du dual E^* et en déduire que E et E^* ont même dimension.*

Exercice 4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^t AA$. Montrer que $rg(A) = rg(B)$ (étudier les noyaux). Trouver un contre exemple dans $M_2(\mathbb{C})$.*

Exercice 5. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est non inversible si et seulement si il existe P inversible telle que PA soit nilpotente.*

Exercice 6. *Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note :*

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & \phi_i(P) = P(x_i) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \to & \psi_i(P) = P'(x_i) \end{array}$$

1. *Montrer que $(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de E^*.*
2. *Chercher la base duale. On notera $P_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.*

Exercice 7. *Soient* $f_1, \dots f_n$ *des formes linéaires sur* E*, de dimension* n *telles qu'il existe* $x \in E$ *non nul tel que* $f_i(x) = i = 1 \dots n$*. Montrer que les formes sont liées.*

Exercice 8. *Soit* $x_0, \dots, x_n$ *des points différents de* $[0,1]$*. Monter qu'il existe* $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ *réels tels que pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$ *on ait*

$$\int_0^1 P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i)$$

Exercice 9. *Soient* u, v *deux endomorphismes de* E*. Montrer que*

$$rg(u) - rg(v \circ u) = dim(Imu \cap Kerv)$$

Exercice 10. *Soient* p, q *deux projecteurs. Montrer les équivalences :*

$$p + q \text{ est un projecteur } \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff \begin{cases} Im(p) \subset Ker(q) \\ Im(q) \subset Ker(p). \end{cases}$$

Chercher alors le noyau et l'image de $p + q$*.*

Montrer que $rg(p) = tr(p)$ *en dimension finie.*

Exercice 11. *Montrer que la matrice* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *est de rang* r *si et seulement si il existe* P, Q *matrices inversibles de* $M_n(\mathbb{R})$ *telles que*

$$PAQ = J_r$$

En déduire que $rg(A) = rg({}^tA)$*.*

Exercice 12. *Calculer* A^n *pour* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. *Soit* $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ *telle qu'il existe un entier* n *avec* $A^n = Id$*. Montrer que* $A^{12} = Id$*.*

Exercice 14. *Trouver les matrices telles que* $A^2 - 4A + 3Id = 0$*.*

Exercice 15. *Trouver le commutant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^k, k \in \mathbb{N}$*. Pour cela on décomposera en éléments simples* $\frac{X^k}{M_A(X)}$*.*

Exercice 17. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les deux suites définies par la donnée de* u_0 *et* v_0 *et les relations*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 3v_n \end{cases}$$

Donner une expression explicite de u_n *et* v_n *en fonction de* n*,* u_0 *et* v_0*.*

Exercice 18. *Soit* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice telle que* $m_{i,j} \geq 0$ *pour tout* i, j *et telle que* $\sum_j m_{i,j} = 1$ *pour tout* i*. Montrer que* 1 *est valeur propre, et que toue valeur propre a un module inférieur ou égal à* 1*.*

Exercice 19. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^3 = A + Id$*. Montrer que* $\det(A)$ *est strictement positif.*

Exercice 20. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *de coefficients* ± 1*. Montrer que le déterminant est divisible par* 2^{n-1} *en utilisant des opérations élémentaires.*

2

Exercice 21. *On note* C *l'espace vectoriel réel des suites convergentes de réels et* C_0 *le sous-espace des suites qui convergent vers* 0*.*

a) On note Φ *l'application de* C *dans* $\mathbb{R}$ *qui à chaque suite* $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *associe* $\Phi(x) = \lim_n x_n$*. Montrer que* Φ *est une forme linéaire sur* C*. Quel est son noyau ?*

b) Etant donnée une suite $x = (x_n)_{n\geq 1} \in C$ *on lui associe la suite* $y = (y_k)_{k\geq 1}$ *définie par* $y_1 = \Phi(x)$ *et pour* $k = 1, 2, \ldots$ $y_{k+1} = x_k - \Phi(x)$*. Montrer que* $y \in C_0$*. Montrer que l'application* $u : C \to C_0$ *ainsi définie est un isomorphisme.*

c) On désigne par C_{st} *le sous-espace de* C *des suites constantes. Montrer que* $C = C_0 \oplus C_{st}$*.*

Exercice 22.

— *Définir la dimension d'un espace vectoriel.*
— *Énoncer le théorème de la base incomplète.*
— *Montrer que tout sous espace vectoriel d'un espace de dimension finie est de dimension finie.*
— *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que* E *et* F *sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.*

Exercice 23. *Soit* $A \in M_2(\mathbb{R})$*, calculer le rang de* $M \to AM - MA$*.*

Exercice 24. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, l'endomorphisme* $M \to tr(A)M + tr(M)A$ *est-il diagonalisable ?*

Exercice 25. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie.*

1) *Soit* f *un endomorphisme de* E*. Montrer que* f *est une homothétie si et seulement si pour tout* $x \in E$*, la famille* $(x, f(x))$ *est liée.*
2) *Déterminer le centre de* $GL(E)$*.*

Exercice 26.

1. *Montrer que si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables alors elles ont même déterminant, trace, rang, polynôme caractéristique et valeurs propres.*
2. *Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique forment un invariant global pour cette relation dans $M_2(\mathbb{R})$ et dans $M_3(\mathbb{R})$.*
3. *Trouver un contre exemple en dimension plus grande avec des matrices nilpotentes.*

Exercice 27.

1) *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer que A et B sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.*
2) *En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 28. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $m \neq 0$ et f un endomorphisme de E.*

1) *Montrer que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ (respectivement la suite $(\mathrm{Ker}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$) décroît strictement puis devient stationnaire(respectivement croît strictement puis devient stationnaire).*
2) *On suppose que f est nilpotent et on note n son indice de nilpotence (c'est-à-dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$).*
   1. *Montrer que $n \leq m$ en remarquant que la suite $(\mathrm{Im}(f^p))_{p\in\mathbb{N}}$ décroît strictement jusqu'à $p = n$ puis devient stationnaire.*
   2. *Retrouver le même résultat en montrant qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ soit libre.*
3) *Donner dans $M_4(\mathbb{R})$ des exemples de matrices nilpotentes d'indices différents.*

Exercice 29. *Montrer que tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite stable ou un plan stable.*

Exercice 30. *Calculer la décomposition de Dunford de la matrice suivante en décomposant en éléments simples la fraction $\frac{1}{\chi_m(X)}$.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 31.

1. *Calculer le déterminant des matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ & & & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$(|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}, (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq n}$$

On fera intervenir les matrices auxiliaires suivantes ou ω est une racine primitive de l'unité :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ & & & \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, B_{i,j} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

2. *Calculer le déterminant de la matrice suivante ou $a_i + b_j \neq 0$ pour tous i, j.*

$$(\frac{1}{a_i + b_j})_{1 \leq i,j \leq n},$$

Exercice 32. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ A & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. On veut déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.*

1 - Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Diagonaliser B.

2 - Montrer que M est semblable à la matrice $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3A \end{bmatrix}$. On pourra raisonner sur les espaces propres.

3 - Calculer χ_M en fonction de χ_A.

(La matrice M est un produit de Kronecker des matrices A et B).

Exercice 33. *Soient A, B, C, D quatre matrices carrées de taille n, avec A inversible et $AC = CA$. Calculer le déterminant de*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

en fonction de celui de $AD - CB$. De quelle hypothèse peut on se passer ?

Exercice 34. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

1. *Calculer le déterminant de l'endomorphisme $M \mapsto AM$.*
2. *Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si elle est valeur propre de l'endomorphisme considéré.*

Exercice 35. *Soit $f = \lambda Id + N$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et N matrice nilpotente. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée.*

Exercice 36. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. On rappelle que le commutant de f est le sous-ensemble $C(f)$ de $L(E)$ défini par $C(f) = \{g \in L(E) \mid fg = gf\}$. On suppose que f est diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f, et pour $i = 1, \dots, p$, on note E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i et on pose $d_i = \dim(\mathrm{E}_{\lambda_i})$.*

1) Montrer que $C(f)$ est une algèbre.

2) Montrer que g commute avec f si et seulement si g laisse invariant les sous espaces propres de f.

3) *Montrer que* $C(f)$ *est isomorphe à* $L(E_{\lambda_1}) \times \ldots \times L(E_{\lambda_p})$.
4) *Montrer que* $\dim(\mathrm{C(f)}) = \dim(\mathrm{E})$ *si et seulement si toutes les valeurs propres de* f *sont simples.*
5) *Si* f *n'est plus diagonalisable, montrer que* $\dim(\mathrm{C(f)}) \geq \dim \mathrm{E}$ *en trigonalisant* f.

Exercice 37. *Soient* A *et* B *deux matrices de* $M_n(\mathbb{C})$. *On note* P *le polynôme caractéristique de* A. *Montrer que* A *et* B *n'ont aucune valeur propre commune si et seulement si* $P(B)$ *est inversible.*

Exercice 38. *Montrer que*

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$$

est diagonalisable.

Exercice 39. *L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une base de* $M_n(\mathbb{R})$ *formée de matrices diagonalisables. On note* E_{ij} *les matrices de la base canonique de* $M_n(\mathbb{R})$.
1) *Soit* D *la matrice diagonale* $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, \mathrm{n})$. *Pour* $i, j = 1, \ldots, n$, *on pose* $F_{ij} = D + E_{ij}$ *si* $i \neq j$, *et* $F_{ii} = E_{ii}$. *Montrer que les* F_{ij} *sont diagonalisables.*
2) *Montrer que les* F_{ij} *engendrent* $M_n(\mathbb{R})$. *(Si* $A = (a_{ij})$ *est donnée, on pourra considérer la matrice* $A - \sum_{i \neq j} a_{ij} F_{ij}$.*)*
3) *Conclure.*

Exercice 40. *Soit* f *un endomorphisme d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie telle qu'il existe un entier* $k \geq 1$ *tel que* f^k *soit inversible et diagonalisable. Montrer que* f *est diagonalisable.*

Exercice 41. *Soit* f *un endomorphisme de* $\mathbb{C}^n$. *Montrer que son polynôme caractéristique et son polynôme minimal ont les mêmes facteurs irréductibles. Généraliser au cas des endomorphismes de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice 42. *Décrire les matrices* $A \in M_6(\mathbb{R})$ *de polynôme caractéristique et de polynôme minimal donnés par*

$$(X-2)^4(X-4)^2, (X-2)^3(X-4)$$

Exercice 43. *Si* a *est dans* $\mathbb{R}^3$, *on regarde l'application* V

$$V : x \mapsto a \wedge x$$

Calculer $exp(V)$.

3 Formes bilinéaires

Exercice 44. *Soit* q *une forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$ *et* f *sa forme bilinéaire. Montrer que la différentielle de* q *en* x *vaut* $y \to 2f(x, y)$.

Exercice 45. *Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant pour tous x, y*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2[f(x) + f(y)] \tag{3.1}$$

— *Montrer que pour tout r rationnel on a $f(rx) = r^2 f(x)$.*
— *Montrer pour tous $x, y, z \in E$*

$$f(x+y+z) = f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z).$$

— *Montrer que*

$$(x, y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$$

est bilinéaire sur $\mathbb{Q}$.
— *Conclure qu'une norme vient d'un produit scalaire si son carré vérifie l'égalité 3.1.*

Exercice 46. *Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire $\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.*

Exercice 47. *Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et G sa matrice de Gram définie par $G_{i,j} =< e_i, e_j >$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.*

1. *Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.*
2. *Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = Id$.*

Exercice 48. *Calculer les signatures des formes quadratiques*

$$xy, xy + yz + xz, x^2 + y^2 + xy$$

Exercice 49. *On appelle $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$q(P) = \int_{-1}^{1} P(t)P(-t)dt.$$

Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa signature.

Exercice 50. *Soit $n \geq 1$. On définit q_1, q_2, q_3 et q_4 sur $M_n(\mathbb{R})$ par*

$$q_1(M) = (tr\ M)^2,\ \ q_2(M) = tr\ ({}^tMM),\ \ q_3(M) = tr\ (M^2).$$

où $S \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique fixée. Montrer que q_1, q_2, q_3 sont des formes quadratiques et calculer leurs signatures.

Exercice 51. *Dans $\mathbb{R}^3$, soit z un vecteur fixe. Calculer la signature de*

$$(x, y) \mapsto < x \wedge y, z >$$

Même question pour

$$(x, y) \mapsto < x \wedge z, y >$$

4 Inégalités

Exercice 52. *Soit $a_1, \dots, a_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On considère*

$$D = det(< a_i, a_j >).$$

- *Montrer que $D \geq 0$. (On pensera à étudier la forme quadratique associée à la matrice).*
- *$D > 0$ si et seulement si les a_i sont indépendants.*
- *$D \leq \prod_i ||a_i||^2$.*

Exercice 53 (*Inégalité d'Hadamard*)**.** *Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$|det\ M|^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |m_{i,j}|^2 \right)$$

et que, si tous les vecteurs colonnes de M sont non nuls, il y a égalité si, et seulement si, la famille des vecteurs colonnes de M est orthogonale.

Exercice 54. *Soit E un espace euclidien de dimension n.*

1. *On suppose qu'il existe $\alpha \neq 1$ et des vecteurs $u_1, ..., u_{n+1}$ de E de norme 1, tels que $\langle u_i, u_j \rangle = \alpha$ pour tous $i \neq j$. Montrer que $\alpha = -\frac{1}{n}$.*
2. *Montrer qu'on peut trouver $u_1, ..., u_{n+1}$ de E de norme 1, tels que $\langle u_i, u_j \rangle = -\frac{1}{n}$ pour tous $i \neq j$.*

Exercice 55. *Soit E un espace préhilbertien réel. Si $p \geq 1$ et $x_1, ..., x_{p+1} \in E$, on dit que la famille $(x_1, ..., x_{p+1})$ est obtusangle si, et seulement si,*

$$\langle x_i, x_j \rangle < 0$$

pour tous $i \neq j$.

1. *On suppose que la famille $(x_1, ..., x_{p+1})$ est obtusangle. Montrer que $(x_1, ..., x_p)$ est libre (on pourra raisonner par récurrence sur p).*
2. *Montrer que, dans un espace euclidien de dimension n, le nombre maximal d'éléments d'une famille obtusangle est $n + 1$.*

Exercice 56. *Soient u, v des endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien. Montrer que*

$$0 \leq tr(uv) \leq (tr\ u)\,(tr\ v)\,.$$

Exercice 57.

1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $det(I_n + A) \geq 1$.*
2. *Soient $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique positive et $T \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $det(S + T) \geq det\ S$.*

5

Exercice 58. *Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. On suppose que $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.*

Exercice 59. *Soit $n \geq 1$. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi(M) = {}^t AMA$ pour toute $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que φ est linéaire de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et calculer son déterminant.*

Exercice 60. *Calculer le minimum sur $a \in \mathbb{R}^n$ de*

$$\int_0^1 (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_0)^2 dx$$

Indications : on pourra successivement montrer

- *Le minimum est donné par $\sqrt{G(1, x, \dots, x^n)/G(1, x, \dots, x^{n-1})}$*
- *Ce minimum est donné via det$(\frac{1}{i+j+1})$*
- *Le déterminant vaut $\frac{\prod_{i<j}(i-j)^2}{\prod_{i,j}(i+j+1)}$*
- *on obtient $(n!)^2/(2n)! * \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$*

Exercice 61. *Pour toute $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose*

$$\|A\| = \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|,$$

où la norme dans le membre de droite est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\|A\| = \rho(A^*A)^{\frac{1}{2}},$$

où $\rho(A^*A)$ est la plus grande valeur propre de A^*A.

6 Groupe orthogonal

Exercice 62. *Soit H, K deux hyperplans d'un espace euclidien. Montrer que s_H, s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$ ou $K^\perp \subset H$.*

Exercice 63. *Compléter la matrice suivante en une matrice orthogonale positive*

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

Exercice 64. *Déterminer les sous groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ de cardinal $2, 3$ ou 4.*

Exercice 65. *Nature de la quadrique de $\mathbb{R}^3$*

$$xy + yz + zx = 1.$$

Exercice 66. *Soit trois droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Décrire l'ensemble des droites coupant les trois.*

Exercice 67. *On considère deux droites non coplanaires de $\mathbb{R}^3$. Décrire l'ensemble obtenu par rotation d'une droite autour de l'autre.*

Exercice 68. *Montrer que par un point d'un hyperboloide à une nappe passe deux droites incluses dans cet hyperboloide.*

7 Géométrie